Operaciona istaživanja - 1

ZADACI I REŠENJA ZADATAKA

1. LINEARNO PROGRAMIRANJE

1.1. Rešavanje problema LP primenom grafičke metode

Primer 1.1.1. Pronaći maksimalnu vrednost funkcije cilja ako je:

f(x)=34Y1+40Y2

pri ograničenjima:

$4x_1+6x_2\leq 48$

$2x_1+2x_2\leq 18$

$2x_1+x_2\leq 16$

uz uslov da je $x_1,x_2\geq 0$

Rešenje: max f(x)=342

Primer 1.1.2. Naći ekstremne vrednosti funkcije cilja (max i min), ako je:

$f(x)=6x_1+9x_2$

pri ograničenjima:

$2Y_1+2Y_2\geq 8$

$2Y_1+3Y_2\leq 17$

$-2Y_1+3Y_2\leq 7$

$-Y_1+2Y_2\geq 2$

$x_2\geq 2$

uz uslov da je $x_1,x_2\geq 0$

Rešenje: max f(x)=51

min f(x)=30

Primer 1.1.3. Naći ekstremne vrednosti funkcije cilja (max i min), ako je:

$f(x)=x_1-x_2$

pri ograničenjima:

$-x_1+2x_2\geq 2$

$x_1\geq 2$

$x_1+x_2\leq 7$

$x_2\leq 4$

$-3x_1+x_2\leq 3$

uz uslov da je $x_1,x_2\geq 0$

Rešenje: max $f(x)=1$

min $f(x)=-2$

Primer 1.1.4. Privatna kompanija ''Lepi Cile New Technologies'' između ostalog proizvodi i drvene gajbice za jabuke i breskve. Odeljenje za plan i analizu ove kompanije želi da napravi optimalan plan proizvodnje (plan koji garantuje najveću dobit). Proizvodnja artikala za narednu sezonu se planira u roku od jednog meseca. Proizvodni proces se odvija na 3 radna mesta i to RM1, RM2 i RM3, koja raspolažu kapacitetom od 20 radna dana sa radom u jednoj smeni (7h/dan).

Za proizvodnju je potrebno utrošiti:

- za gajbicu za jabuke (po komadu): 20min na RM1, 10min na RM2 i 15min na RM3
- za gajbicu za breskve (po komadu): 15 min na RM1, 10min na RM2 i 15 min na RM3.

Ispitivanje tržišta, koje je uzelo u obzir savremeni dizajn proizvoda, vrhunski kvalitet završne obrade i dokazani renome firme je pokazalo da se u razmatranom periodu može plasirati do 350 kom. gajbica za jabuke i do 450 kom. gajbica za breskve.

Dobit po jedinici proizvoda je: 12 n.j. za gajbice za jabuke i 9 n.j. za gajbice za breskve.

Uraditi:

a) Formulisati matematički model problema kojim se definiše optimalni proizvodni program i napisati aplikativni LINDO program.
b) Odredite optimalni proizvodni program.

c) Ispitati da li određeni proizvodni program ostaje optimalan i u slučaju da zbog promena na tržištu dobit za gajbice za jabuke opadne za 3 n.j. po komadu, a za gajbice za breskve poraste za 2 n.j. po komadu.

Rešenje: b) max f(x)=5.040 n.j.

c) max f(x)=5.026,6 n.j.

Primer 1.1.5. Privatna kompanija ''Lepi Cile – Research and Development'' između ostalog proizvodi baštenske vile i motike i želi da napravi optimalni plan proizvodnje za naredni kvartal. Proizvodni proces se odvija na 4 mašine i to: M1, M2, M3 i M4, koje raspolažu sledećim slobodnim kapacitetima za proizvodnju gore navedenih artikala:

- mašina M1: 20 dana x 2h/dan,
- mašina M2: 20 dana x 3h/dan,
- mašina M3: 20 dana x 2h/dan i
- mašina M4: 20 dana x 2,5h/dan.

Za proizvodnju je potrebno utrošiti:

- za baštenske vile (po kom.): 20 min na M1, 10 min na M2, 10 min na M3 i 20 min na M4
- za motike (po kom.): 15 min na M1, 10 min na M2 i 15 min na M3.

Ispitivanje tržišta koje je uzelo u obzir savremeni dizajn proizvoda i vrhunski kvalitet završne obrade i dokazani renome firme je pokazalo da se u razmatranom periodu može plasirati do 250kom/mes vila i 250 kom/mes motika. Kompanija je tokom predsezone već ugovorila neke količine proizvoda koje se mogu zadovoljiti, pod uslovom minimalne proizvodnje od 10 kom/mes vila i 25 kom/mes motika.

Troškovi proizvodnje su: 10 n.j./kom za vile i 12 n.j./kom za motike. Prodajna cena je: 23 n.j./kom za vile i 20 n.j./kom za motike.

Uraditi:

a) formulisati matematički model problema kojim se definiše optimalni proizvodni program i napisati aplikativni LINDO program.
b) Odrediti optimalni proizvodni program.
c) Ispitati da li određeni proizvodni program ostaje optimalan i u slučaju da se zbog promena na tržištu može plasirati do 150 kom/mes vila i do 300 kom/mes motika.

Rešenje: b) max f(x)=4.548,75 n.j.

c) ostaje optimalan

Primer 1.1.6. Menadžment preduzeća ’’Slatkiš’’ koje proizvodi konditorske proizvode, želi da u narednom periodu osvoji tržište sa dva nova proizvoda. Odlučeno je da se na tržiđtu nastupi sa proizvodima P1 (bela čokolada) i P2 (karamel bombone). Proizvodi se pakuju u velikim paletama i tako transportuju do potrošača. Odeljenje za R&R ovog preduzeća želi da napravi optimalni plan proizvodnje, t.j. plan koji garantuje najveću dobit. Proizvodnja artikala se planira za naredno polugodište (jedan mesec ima 20 radnih dana). Proizvodnja ovih proizvoda se odvija na mašinama M1, M2 i M3. Kapaciteti mašina iskazani su raspoloživim fondom časova svake mašine u jednom radnom danu i oni iznose:

- 5h za mašinu M1
- 6h za mašinu M2 i
- 6h za mašinu M3.

Za proizvodnju jedne jedinice proizvoda (velika paleta) potrebno je utrošiti:

- za proizvod P1: 0,2h rada mašine M1; 0,1h rada mašine M2 i 0,2h rada mašine M3,
- za proizvod P2: 0.1h rada mašine M1; 0,3h rada mašine M2 i 0,2h rada mašine M3.

Menadžment preduzeća je već ugovorio sa kupcima prodaju 600 paleta bele čokolade i 300 paleta karamel bombona.

Ispitivanjem tržišta došlo je do podatka da se za naredni period (polugodište) može plasirati najviše 3000 paleta karamel bombona. Takođe se, ekonomskom analizom i ispitivanjem tržišta došlo do cene koštanja proizvoda i moguće cene prodaje, kao što je prikazano u tabeli:

Proizvod	Cena koštanja (n.j./paleta)	Cena prodaje (n.j./paleta)
Bela čokolada	8	14
Karamel bombone	6	10

Uraditi:

a) formulisati matematički model kojim se definiše optimalni proizvodni program

b) Odrediti optimalni proizvodni program.

c) Napisati aplikativni LINDO program za postavljeni model.

Rešenje: b) max f(x)=21.600 n.j./paleta

Primer 1.1.7. Porodica Petrović priprema slavlje. Za deo posluženja potrebno je pripremiti najmanje 700 komada sitnih kolača. U porodici se razmišlja o pripremanju dve vrste kolača: salčića i vanilica. Za pripremu kolača potrebno je upotrebiti:

- za jedan komad kolača salčića 20 *gr* brašna, a za jedan komad kolača vanilice 40 *gr*. Zbog prihvatljive cene sa jednim privatnim dobavljačem ugovoreno je da se nabavi najmanje 20 *kg* brašna.
- Cena izrade jednog komada kolača salčića je 0,20 *n.j.* a jednog komada kolača vanilice 0,30 *n.j.*

Želja porodice je da troškovi pripreme ovih kolača budu minimalni.

Uraditi:

a) Formulisati matematički model problema kojim se definiše optimalni proizvodni program,

b) Napisati aplikativni LINDO program,

c) Grafičkom metodom, odrediti optimalni proizvodni program.

Rešenje: c) min f(x)=170 n.j.

1.2. Rešavanje problema LP primenom matričnog računa

Primer 1.2.1. max $f(x)=2x_1+5x_2$

P.O. $3x_1+3x_2\leq 9$

$6x_1+2x_2\leq 12$

Rešenje: Maksimum iznosi 15 i on se postiže ako se ne proizvodi x_1, a proizvodi se 3 jedinice proizvoda x_2 dnevno.

1.3. SIMPLEX metoda

Primer 1.3.1. max $f(x)=6x_1+7x_2+8x_3$

p.o. $x_1+2x_2+x_3\leq 900$

$x_1+3x_2+2x_3\leq 1600$

$2x_1\leq x_2+x_3$

Rešenje: max $f(x)=6.800$ ($x_1=200$; $x_2=700$; $x_3=300$)

Primer 1.3.2. max $f(x)=80x_1+50x_2+40x_3+20x_4$

p.o. $8x_1+6x_2+4x_3+2x_4\leq 400$

$x_1+x_2+x_3+x_4=100$

$8x_1+4x_2+4x_3\geq 300$

Rešenje: max $f(x)=4.000$ ($x_1=25$; $x_3=25$; $x_4=50$)

Primer 1.3.3. max $f(x)=7x_1+5x_2+6x_3+8x_4$

p.o. $x_1+x_2+x_3+x_4=24$

$3x_1+4x_2+2x_3+3x_4\leq 50$

$x_1+2x_2+2x_3+2x_4\geq 40$

Rešenje: max $f(x)=148$ ($x_5=8$; $x_4=2$; $x_3=22$)

Primer 1.3.4. Pivara proizvodi četri vrste piva: svetlo, tamno, bez alkohola i premijum. Menadžment preduzeća želi da odredi program proizvodnje koji će obezbediti najveću dobit u poslovanju za naredno polugodište, pri čemu se može računati da jedan mesec ima u proseku 25 radnih dana. Ekonomskom analizom i ispitivanjem tržišta došlo se do podataka da su troškovi proizvodnje po jedinici proizvoda 15 n.j., 16 n.j., 18 n.j., 19 n.j. respektivno, a prodajna cena 30 n.j., 32 n.j., 38 n.j., 40 n.j. respektivno. Pri definisanju programa proizvodnje moraju se uzeti u obzir sledeći ograničavajući faktori: kapacitet mašine M, količina slada (sirovina S1), količina hmelja (sirovina S2), količina kvasca (sirovina S3), zavisnost između proizvedenih količina piva bez alkohola i premijum i zahtevi tržišta za proizvodima.

- Kapacitet mašine M iznosi 24 h dnevno, a za proizvodnju jedne jedinice proizvoda potrebno je 3 min, 2 min, 4 min i 6 min, respektivno.
- Mesečno se može nabaviti 200 kg slada. Za proizvodnju jedne jedinice navedenog artikla potrebno je 10 gr, 10 gr, 0 gr i 30 gr ove sirovine respektivno.
- Za razmatrani period je nabavljeno 500 kg hmelja. za proizvodnju jedne jedinice navedenog artikla potrebno je 20 gr, 10 gr, 20 gr i 10 gr, respektivno.

- Takođe, za razmatrani period je nabavljeno 300kg kvasce. Zbog kvarljivosti, celokupna količina se mora utrošiti do kraja razmatranog perioda. Za proizvodnju jedne jedinice navedenog artikla potrebno je 10 gr, 10 gr, 10 gr i 40 gr ove sirovine, respektivno.
- Zbog tehnoloških zahteva proizvodnje, postoji zavisnost između navedenih količina bez alkoholnog i premijum piva. Proizvodnja premijum piva može biti najviše 4 puta veća od proizvodnje bez alkoholnog.
- Poznati kupci Ki(i=1,2,3,4,5) su za navedeni period dostavili svoje porudžbine. One iznose 50.000, 75.000, 40.000, 35.000, 60.000 jedinica svih proizvoda. Od navedene količine više se ne može plasirati, ali se porudžbinama ne mora obavezno udovoljiti.

Uraditi:

a) Napisati aplikativni LINDO program kojim se definiše optimalna proizvodnja.
b) Napisati početnu SIMPLEX tabelu, odrediti koja promenljiva ulazi u bazu, a koja izlazi iz baze.
c) Naći vrednost funkcije posle prve iteracije.

Rešenje: max f(x)=157.500 n.j.

Primer 1.3.5. min $f(x)=160x_1+100x_2+120x_3$

p.o. $2x_1+x_2+2x_3 \geq 350$

$x_1+x_2+x_3 \geq 300$

$4x_1+x_2+2x_3 \geq 400$

Rešenje: min f(x)=32.000 n.j. ($x_3=100$; $x_2=200$; $x_4=50$)

Primer 1.3.6. Tekstilno preduzeće proizvodi kapute (proizvod x_1), muška odela (proizvod x_2) i ženske kapute (proizvod x_3). Proizvodni proces se odvija na 10 mašina tipa M1, 10 mašina tipa M2, 10 mašina tipa M3 i 10 mašina tipa M4.

Raspoloživi kapaciteti na mašinama u toku jednog meseca su:

M1: 20 dana x 16 h/dnevno

M2: 20 dana x 6 h/dnevno

M3: 20 dana x 20 h/dnevno

Za proizvodnju je potrebno utrošiti:

Ženski kaput (x_1): 4h na M1, 2h na M2, 4h na M3 i 3h na M4

Muško odelo (x_2): 4h na M1, 2h na M2, 4h na M3 i 3h na M4

Ženski komplet (x_3): 5h na M1, 3h na M2, 5h na M3 i 2h na M4

Za izradu ženskih kaputa uvozi se krzno polarne lisice, koje je raspoloživo u količini za izradu 300 kom/mesečno. Ispitivanje tržišta, koje je uzelo u obzir savremeni dizajn proizvoda i dokazani renome firme je pokazalo da tržište ne predstavlja ograničenje, osim za ženske komplete, koje je moguće u razmatranom periodu od mesec dana, plasirati najviše 450 kompleta.

Dobit po jedinici proizvoda je: 1.300 n.j. za ženske kapute, 1.200 n.j. za muška odela i 1.100 n.j. za ženske komplete.

Uraditi:

a) Formulisati matematički model problema kojim se definiše optimalni proizvodni program (asortiman koji garantuje najveću dobit).
b) Koristeći LINDO program naći optimalni proizvodni program.
c) Izvršiti analizu osetljivosti optimalnog rešenja.

Rešenje: max f(x)= 750.000 n.j.

Primer 1.3.7. Napisati dualni model LP za dati primarni model

$$\min f(y)=2y_1+3y_2+4y_3+y_4$$

$$\text{p.o.}\quad 8y_1+5y_2+3y_3+y_4\geq 400$$

$$2y_1+y_2+6y_3+5y_4\geq 250$$

$$5y_1+4y_2+3y_3+2y_4\geq 220$$

$$6y_1+3y_2+4y_3+5y_4\geq 250$$

Primer 1.3.8. Napisati dualni model LP za dati primarni model

$$\min f(y)=3y_1+2y_2+4y_3$$

$$\text{p.o.}\quad 4y_1+5y_2+5y_3\geq 200$$

$$2y_1+6y_2+y_3\geq 450$$

$$6y_1+y_2+3y_3\geq 220$$

$$6y_1+3y_2+4y_3\geq 250$$

Primer 1.3.9. Dat je problem LP (primarni model):

$\min g(x,y;z)=3x+4y+8z$

p.o. $6x-2y+z\geq 2$

$6x+9y-4z\geq 3$

$x+3y+8z\geq 5$

Uraditi:

a) Odrediti matematički model dualnog problema.
b) Za dobijeni dualni model napisati početnu SIMPLEX tabelu i odrediti promenljive koje u prvom koraku izlaze iz baze, odnosno ulaze u bazu.
c) Za dobijeni dualni model napisati aplikativni LINDO program.

Primer 1.3.10. Napisati dualni model LP za dati primarni model

$\min f(y)=3y_1+2y_2+4y_3$

p.o. $4y_1+5y_2+5y_3\geq 200$

$2y_1-6y_2+y_3\geq 450$

$6y_1+y_2+3y_3\geq 220$

$6y_1+3y_2-4y_3\geq 250$

Primer 1.3.11. Napisati dualni model LP za dati primarni model

$\min f(y)=2y_1+3y_2+4y_3+y_4$

p.o. $8y_1+5y_2-3y_3+y_4\geq 400$

$2y_1+y_2+6y_3+5y_4\leq 250$

$5y_1-4y_2+3y_3+2y_4=220$

$6y_1+3y_2+4y_3-5y_4\geq 250$

Primer 1.3.12. Napisati dualni model LP za dati primarni model

$\min f(y)=3y_1+4y_2$

p.o. $3y_1+6y_2\geq 18$

$4y_1+2y_2\geq 8$

Uraditi:

a) Naći grafičko rešenje primarnog modela.
b) Napisati dualni model.
c) Naći grafičko rešenje dualnog modela.

Rešenje: min f(y)=maxf(x)=12,65

Primer 1.3.13. Napisati dualni model LP za dati primarni model

$\min f(y)=3y_1-4y_2$

p.o. $3y_1+6y_2\geq 18$

$4y_1+2y_2\geq 8$

$2y_2\geq 4$

$y_1\geq 1$

Uraditi:

a) Naći grafičko rešenje primarnog modela.
b) Napisati dualni model.
c) Za dobijeni dualni model napisati početnu SIMPLEX tabelu.
d) Odrediti promenljive koje u prvoj iteraciji izlaze iz baze, odnosno ulaze u bazu.
e) Kolika je funkcija cilja posle prve iteracije?
f) Za dobijeni dualni model napisati aplikativni LINDO program.

Rešenje: min f(y)=maxf(x)=-7

1.4. TRANSPORTNI MODEL

1.4.1. Zatvoren transportni model

Primer 1.4.1.1. Fabrike šećera F1, F2 i F3 snabdevaju šećerom četiri potrošačka centra C1, C2, C3 i C4. Fabrika F1 može da isporuči 70t šećera, F2 20t šećera, F3 30t šećera. Centru C1 potrebno je 20t šećera, centru C2 25t, C3 35t, a centru C4 40t šećera. Transpotni troškovi po jednoj toni šećera na relaciji fabrike-potrošački centri dati su u sledećoj tabeli.

Ponori / *Izvori*	C_1	C_2	C_3	C_4
F_1	2	6	5	8
F_2	9	4	7	8
F_3	3	6	8	9

Uraditi:

a) Postaviti matematički model LP koji odgovara opisanom problemu i napisati LINDO program.
b) Napisati početno rešenje problema korišćenjem svih sedam metoda.
c) Odrediti optimalni transportni program.
d) Kolika se ušteda ostvaruje u odnosu na početno rešenje (koristeći dijagonalnu metodu)?

Rešenje:

b) dijagonalna metoda – 735; metoda minimalnih cena po redovima - 695; metoda minimalnih cena po kolonama – 675; metoda minimalnih cena u matrici – 670; Vogelova metoda – 670; Vogel – Kordinov postupak – 670; metoda dvostrukog precrtavanja – 670

c) min f(x)=670 n.j.

$$X = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 35 & 15 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

d) ΔT=65 n.j.

1.4.2. Degeneracija transportnog modela

Primer 1.4.2.1. Iz četiri skladišta je potrebno dostaviti robu u tri fabrike.

Ponori / Izvori	140 P_1	35 P_2	105 P_3
S_1 70	50	60	0
S_2 105	40	20	15
S_3 70	30	45	20
S_4 35	35	40	25

a) Odrediti početno rešenje korišćenjem dijagonalne metode i rešiti TP.

b) Kolika je ušteda u odnosu na početno rešenje?

Rešenje:

a) min f(x)=5.950 n.j.

$$^{/}X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 70 \\ 35 & 35 & 35 \\ 70 & 0 & 0 \\ 35 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) ΔT=3.325 n.j.

1.4.3. Otvoren transportni model

Primer 1.4.3.1. Potrebno je kamione iz tri garažna mesta uputiti na tri odredišta. Cene su izražene u stotinama km.

Ponori / Izvori	140 P_1	35 P_2	105 P_3
S_1 70	50	60	0
S_2 105	40	20	15
S_3 70	30	45	20

Uraditi:

a) Naći početno rešenje pomoću dijagonalne metode.

b) Naći početno rešenje korišćenjem minimalnih cena u matrici.

c) Napisati matematički model za ovaj problem.

d) Počev od boljeg početnog rešenja odrediti optimalni transportni program.

Rešenje:

a) $T^{(0)}$=18.100 km

b) $T^{(0)}$=10.000 km

c) min f(x)= 9.200 km

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Primer 1.4.3.2. Kompanija AD Tigar poseduje 3 linije za proizvodnju auto guma L1,L2 i L3 i pet velikih skladišta, odnosno distributivnih centara D1, D2, D3, D4 i D5. Proizvodni kapaciteti su 4.000, 5.000 i 3.000 guma/dan, respektivno. Mogućnost plasmana u regionima koje pokrivaju distributivni centri je: 2.000, 1.500, 3.000, 3.500 i 2.000 guma/dan, respektivno. Jedinične cene prevoza između kompanije i distributivnih centara su:

L1D1=2, L1D2=4, L1D3=3, L1D4=5, L1D5=3, L2D1=4, L2D2=2, L2D3=2, L2D4=3, L2D5=4, L3D1=1, L3D2=2, L3D3=4, L3D4=1, L3D5=3.

Potrebno je:

a) Napisati početno rešenje koristeći dijagonalnu metodu.

b) Mo-Di (dijagonalnom) metodom rešiti TP, tako da ukupni troškovi budu minimalni.

c) Odrediti uštede koje se postižu u odnosu na početno rešenje.

d) Proveriti dobijeno rešenje korišćenjem LINDO programa.

Rešenje:

a) $T^{(0)}$=31.000 n.j.

b) $T^{(1)}$=29.500 n.j.

$T^{(2)}$=23.500 n.j. , min f(x)=23.500 n.j.

$$X = \begin{bmatrix} 2000 & 0 & 0 & 0 & 2000 \\ 0 & 1500 & 3000 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3000 & 0 \end{bmatrix}$$

c) ΔT=7.500 n.j.

1.5. PROBLEM RASPOREĐIVANJA (ASIGNACIJE)

Primer 1.5.1. Potrebno je 5 radnika rasporediti na 5 mašina. Svaki radnik je sposoban za izvršavanje svih poslova, ali pri tome radnici utroše različita vremena. U aktuelnom vremenskom razdoblju 1 radnik može biti angažovan samo na 1 mašini, a na jednoj mašini može da radi samo 1 radnik. Potrebno je pronaći takav raspored radnika da ukupno vreme izvršenja poslova bude minimalno. Potrebna vremena (u satima) za izvršenje poslova data su u tabeli.

Ponori / Izvori	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	3	21	12	6	10
R_2	8	23	2	5	5
R_3	33	14	13	10	7
R_4	14	21	19	11	11
R_5	9	16	10	15	13

Za rešenje ovog modela koristi se mađarska metoda.

Odrediti:

a) Matematički model.

b) Rešiti zadatak primenom aplikativnog LINDO programa.

Rešenje: b) $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ min f(x)=39h

1.6. CELOBROJNO PROGRAMIRANJE

1.6.1. Komanda INTEGER

Primer 1.6.1.1. Data je funkcija cilja koja ima sledeći oblik:

max $f(x)=30x_1+20x_2+10x_3$

pri ograničenju:

$17x_1+13x_2+11x_3 \leq 29$

Uraditi:

a) Napisati aplikativni LINDO program bez zahteva za celobrojnim rešenjem.

b) Aplikativni LINDO program sa zahtevom za celobrojnim rešenjem svih promenljivih.

c) Aplikativni LINDO program sa zahtevom za celobrojnim rešenjem promenljivih x_1 i x_2.

Rešenje:

a) $X = \begin{bmatrix} 1{,}705 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1{,}091 \end{bmatrix}$

1.6.2. Komanda GIN

Primer 1.6.2.1. Tekst zadatka je u skripti (oblast celobrojnog programiranja).

Uraditi:

a) Rešiti zadatak primenom aplikativnog LINDO programa bez zahteva za celobrojnim rešenjem.

b) Rešiti zadatak primenom aplikativnog LINDO programa sa zahtevom da sve promenljive budu celi brojevi.

Rešenje:

a) $X = \begin{bmatrix} 504{,}517 \\ 96{,}123 \\ 134{,}766 \\ 186{,}581 \\ 30 \\ 47{,}741 \\ 0 \end{bmatrix}$ max f(x)=20.780,04

b) $X = \begin{bmatrix} 506 \\ 96 \\ 134 \\ 186 \\ 31 \\ 47 \\ 0 \end{bmatrix}$ max f(x)=20.759

2. NELINEARNO PROGRAMIRANJE

Primer 2.1. (skripta) Naći ekstremne vrednosti nelinearne funkcije cilja:

$f(x,y)=(x-4)^2+(y-8)^2$

uz linearna ograničenja:

p_1: $2x+5y \leq 30$

p_2: $2x+y \leq 14$

Rešenje:

min f(x,y)=11,17

max f(x,y)=80

Primer 2.2. Fabrika opreme proizvodi dva tipa elektro motora: tip A i tip B. Funkcija je nelinearnog karaktera i može se opisati jednačinom tipa : $f(x)=A^2+B^2-14A-14B+98$. Ograničenja se mogu predstaviti linearnim nejednačinama koje iznose:

$2A+3B \leq 24$

$2A+B \leq 14$

$A \geq 2$

$B \geq 1$

Uraditi:

a) Grafičkom metodom naći ekstremne vrednosti nelinearne funkcije cilja.

b) Napisati aplikativni LINGO program za max f(x), sa zahtevom za celobrojnim rešenjem oba proizvoda.

Rešenje:

a) min f(x)=10.25

max f(x)=61

Primer 2.3. Rešiti sledeću funkciju cilja:

$f(x,y)=(x-1,5)^2+(y-3)^2$

pri ograničenjima:

$x+3y \leq 6$

$4x+y \leq 8$

$y \geq 1$

Rešenje:

max f(x,y)=6,25

min f(x,y)=2,02

Primer 2.4. (knjiga) Funkcija troškova proizvodnje tri artikla x_1,x_2 i x_3 je nelinearna i data je kao: $T(x)=4x_1^2+\frac{1}{12}x_2^3+7x_3^2-x_2-2x_1+\frac{7}{2}x_3+7$

Odrediti stacionarne tačke funkcije i definisati njihovu prirodu.

Rešenje:

Funkcija ima lokalni minimum u tački A(1/4,2,-1/4) i on iznosi min T(x)=T(A)=4,979≈4.98 i u tački B(1/4,-2,-1/4) i on iznosi T(x)=T(B)=7,646≈7,65

Primer 2.5. Odrediti stacionarne tačke i rešiti model, ako je data nelinearna funkcija cilja $T(x)=\frac{1}{4}x_1^3+12x_2^2+21x_3^3-3x_1-6x_2+7x_3+10$

Rešenje:

Stacionarna tačka A(2,1/4,-1/6), gde je min f(x)=min f(A)=4,66

Stacionarna tačka B(-2,1/4,-1/6), gde je max f(x)=max f(B)=15

Primer 2.6. Jedna fabrika proizvodi 3 proizvoda pod sledećim uslovima:

- Svaki proizvod se obrađuje na mašini M ukupnog kapaciteta od 18h, sa utroškom mašinskog vremena od 3h, 1h i 1h po komadu proizvoda, respektivno.
- Raspoložive količine sirovine S od 90 kg treba 100% utrošiti. Za 1 komad proizvoda A,B,C utroši se 2kg, 3kg i 3kg sirovine S, respektivno.
- Količina proizvoda A može biti najviše kolika je i količina proizvoda C.
- Troškovi proizvodnje su aproksimirani funkcijom:

  $12x_1+2x_2^2+10x_3$, gde su x_1, x_2 i x_3 količine proizvoda A,B i C.

Postavite model, izvršite linearizaciju funkcije kriterijuma birajući 3 jednaka intervala i nađite jedno moguće rešenje.

Rešenje:

Sistem ograničavajućih uslova nije konzistentan, ne postoji moguće rešenje. Na mašini M može se obraditi najviše 54 kg sirovine S, što znači da nije moguće utrošiti ukupne zalihe od 90 kg.

3. DINAMIČKO PROGRAMIRANJE

Primer 3.1. Preduzeće raspolaže sa 4 nove mašine koje treba da se instaliraju u 3 pogona. Montiranjem mašina ostvaruje se sledeća dobit: u I pogonu 3 n.j./mašini, u II pogonu x_2^2, a u III pogonu kao što je dato u tabeli

x_3	0	1	2	3	0
$g_3(x_3)$	0	6	9	10	0

Stanje u pogonima je takvo da je u I potrebno najmanje 1 mašina, u II najviše 2, a u III najviše 3 mašine. Primenom DP odrediti optimalan raspored mašina po pogonima koji obezbeđuju maksimalnu ukupnu dobit.

Rešenje:

I optimalni raspored mašina po pogonima je:

$x_1=1$

$x_2=2$

$x_3=1$

II optimalni raspored mašina po pogonima je:

$x_1=1$

$x_2=1$

$x_3=2$

III optimalni raspored mašina po pogonima je:

$x_1=1$

$x_2=0$

$x_3=3$

Primer 3.2. Za potrebe rada proizvodnog sistema potrebno je materijal rasporediti na 3 moguće proizvodne linije, pri čemu je kapacitet proizvodnih linija limitiran na količinu materijala $0 \leq x_i \leq 3$. Količina materijala je takođe ograničena i iznosi 5 jedinica. Ostvarena dobit je $f(x)=2x_1+3x_2^2+x_3^2$. Ograničenu količinu materijala treba tako distribuirati proizvodnim linijama da ostvarena dobit od njegove prerade u razmatranom periodu bude maksimalna.

Rešenje:

$$X = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{max } f(x)=35 \text{ n.j.}$$

Primer 3.3. Preduzeće raspolaže sa 25 jedinica jednorodnog resursa (mašina) za proizvodnju dva proizvoda A i B koje treba da izrađuje u naredne 3 godine (N=3). Dobit koja se može ostvariti je:

$g(x_i) + h(y_i)=10x_i+5y_i$

Amortizacija koja zavisi od dela koji se izrađuje na mašini iznosi 50% za mašine koje izrađuju proizvod A i 20% za mašine koje izrađuju proizvod B, tako da broj raspoloživih mašina za naredni period iznosi:

$n_{i+1}=0{,}5x_i+0.8y_i$

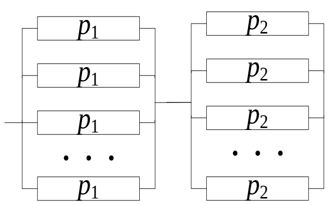
Formulisati matematički model tako da se ukupna dobit maksimizira.

Rešenje:

max $f(x)= f_3(25)=305$

4. OPTIMALNO REZERVIRANJE

Primer 3.1. (skripta) Razmatrani sistem se sastoji od 2 podsistema kao što je dato na slici, čiji elementi verovatnoće pouzdanog rada sistema iznose $p_1=0,7$ i $p_2=0.5$

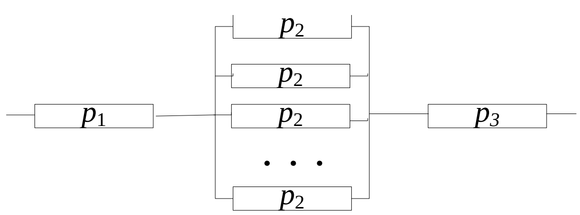


Zadatak je naći takvu strukturu sistema, da ukupna pouzdanost bude $p \geq 0.98$

I rešenje: $x_1=3$, $x_2=6$

II rešenje: $x_1=4$, $x_2=5$

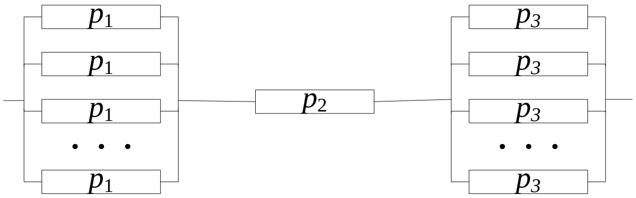
Primer 3.2. Napisati izraz za pouzdanost sistema prikazanog na slici.



Rešenje:

$P=p_1p_2p_3(4-6p_2-4p_2^2-p_2^3)$

Primer 3.3. Razmatrani tehnički sistem se sastoji izkomponenata kao što je dato na slici, pri čemu elementi imaju verovatnoću bez otkaznog rada (pouzdanost) $p_1=p_2=0,9$, $p_3=0.8$.



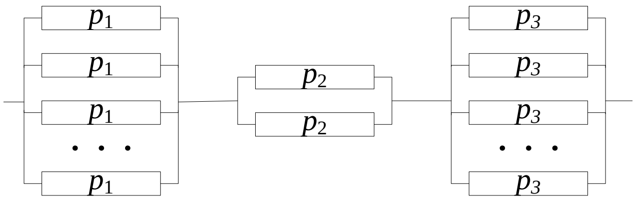
Definisati moguću strukturu sistema tako da njegova pouzdanost bude $P(x) \geq 0{,}80$

Rešenje:

I rešenje: $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=2$

II rešenje: $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=1$

Primer 3.4. Kompozicija jednog složenog sistema je prikazana na slici:



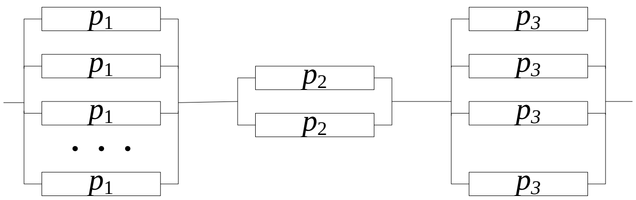
Poznate su karakteristike elemenata sistema $p_1=0{,}7$; $p_2=p_3=0{,}8$. Odrediti minimalnu moguću strukturu sistema, tako da verovatnoća otkaznog rada (nepouzdanost) ne bude veća od 5%.

Rešenje:

I rešenje: $x_1=3$, $x_2=1$, $x_3=3$

II rešenje: $x_1=4$, $x_2=1$, $x_3=2$

Primer 3.5. Elektronski uređaj se sastoji iz tri serijski vezane komponente p_1,p_2 i p_3. Svaka komponenta je sastavljena od jedne ili više komponeneti istog tipa pri čemu se samo kod prve može povećati broj rezervnih delova. Verovatnoća bez otkaznog rada je $p_1=0{,}80$; $p_2=0{,}85$; $p_3=0{,}90$.



Odrediti:

a) Minimalnu moguću strukturu sistema, tako da verovatnoća bez otkaznog rada bude $\geq 0{,}90$.

b) Minimalne ukupne troškove rezerviranja, uz minimalnu pouzdanost od 0,90, ako je cena jedne rezrevne komponente c_1=5 n.j.; c_2=2 n.j. i c_3=1 n.j. i formulisati matematički model.

Rešenje:

a) I rešenje: $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=2$

II rešenje: $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=2$

b) I varijanta: $C(x)=9$ n.j.

II varijanta: $C(x)=14$ n.j.