TEHNIČKI FAKULTET U BORU
Univerzitet u Beogradu

UPRAVLJANJE RIZIKOM

Zbirka zadataka sa izvodima iz teorije

Doc. dr Marija Panić

Bor, 2017.

TEHNIČKI FAKULTET U BORU
Univerzitet u Beogradu

UPRAVLJANJE RIZIKOM

Zbirka zadataka sa izvodima iz teorije

Doc. dr Marija Panić

Bor, 2017.

UPRAVLJANJE RIZIKOM (Zbirka zadataka sa izvodima iz teorije)

Autor: Dr Marija Panić, docent Tehničkog fakulteta u Boru, Univerziteta u Beogradu

Izdavač: Tehnički fakultet u Boru, Univerzitet u Beogradu

Za izdavača: Prof. dr Nada Štrbac, dekan

Recenzenti:
Dr Živan Živković, redovni profesor Tehničkog fakulteta u Boru, Univerziteta u Beogradu
Dr Vesna Spasojević Brkić, redovni profesor Mašinskog fakulteta u Beogradu, Univerziteta u Beogradu

Urednik: Prof. dr Svetlana Ivanov, Predsednik Komisije za izdavačku delatnost, Tehnički fakultet u Boru

Odobreno za štampu odlukom dekana Tehničkog fakulteta u Boru broj I/6-1108/2 od 22.06.2017.

ISBN: 978-86-6305-065-5

Štamparija: Happy, Zaječar

Tiraž: 100 primeraka

Mesto izdavanja i godina: Bor, 2017.

P R E D G O V O R

Zbirka zadataka Upravljanje rizikom namenjena je studentima osnovnih studija na Tehničkom fakultetu u Boru, Univerziteta u Beogradu. Sadržaj ove publikacije prilagođen je nastavnom programu za predmet Upravljanje rizikom koji pohađaju studenti četvrte godine na Odseku za inženjerski menadžment.

Osnovna ideja ove publikacije zasnovana je na sveobuhvatnom izučavanju rizika, kao i pojmovima koji su usko povezani sa rizikom i razumevanju osnovnih parametara rizika. Ova zbirka bi trebalo da omogući studentima da ovladaju osnovnim pojmovima o riziku, osnovnim principima upravljanja rizikom, kao i metodama merenja i procene rizika.

Zbirka se sastoji iz tri dela.

U prvom delu, nakon definisanja osiguranja i životnog osiguranja, obrađeni su fundamentalni pojmovi teorije verovatnoće i zakona velikih brojeva, a zatim je ukazano na računske osnove obračuna tarifa u životnom osiguranju, sa naglaskom na Tablicama smrtnosti, verovatnoći života i smrti lica, kao i verovatnom trajanju života. Predmet analize u nastavku prvog dela jeste obračun tarifa u životnom osiguranju, koji čine: osiguranje lične rente uplatom mize, osiguranje kapitala uplatom mize i osigurane kapitala uplatom premije. Namera autora jeste da studenti kroz primere iz prakse životnog osiguranja savladaju primenu aktuarskih metoda.

U drugom delu analizirana je verovatnoća i osnovne karakteristike verovatnoće: slučajni eksperimenti i događaji i algebra događaja. U nastavku je obrazložen način izračunavanja uslovne verovatnoće, totalne verovatnoće i primena Bayes-ove formule.

Predmet razmatranja u trećem delu su matrice za procenu rizika, kao kvalitativne metode za rangiranje rizika sa kojima se susreće organizacija, koja za svoje ose ima rangove verovatnoće i uticaja (posledice). U nastavku je zatim prikazana primena Monte Carlo metode i izvođenje Monte Carlo simulacije na praktičnom primeru agroekonomskog problema prilikom donošenja odluka u uslovima rizika.

Sva navedena poglavlja skoro uvek su propraćena i praktičnim primerima radi lakšeg razumevanja tematike.

Bor, 2017. godine *A u t o r*

S A D R Ž A J

I DEO

II DEO

III DEO

LITERATURA

PRILOZI

I DEO

1. OSIGURANJE

1.1. Definicija osiguranja

Nesrećni slučajevi su uzrok velikih opasnosti za ljude, njihov život, zdravlje i imovinu još od samih početaka postojanja društva, pa se iz tih razloga javila neophodnost zaštite članova društva, kao i ekonomskih vrednosti koje su stvorili.

Osiguranje predstavlja udruživanje svih onih koji su izloženi istoj opasnosti, odnosno istom riziku, sa ciljem da zajednički podnesu štetu koja će zadesiti samo neke od njih. Prema tome, osiguranje se zasniva na načelu uzajamnosti i solidarnosti. Osnovna pretpostavka postojanja osiguranja zapravo jeste prisustvo rizika. Ukoliko postoji određeni rizik, javlja se i ekonomska potreba za njegovim pokrićem putem osiguranja.

U najširem pojmovnom određenju, rizik je se može definisati kao *mogućnost trpljenja štete ili gubitaka*, odnosno *„faktor, stvar, element koji uključuje neizvesnost i opasnost“*. Međutim, pojam rizika se menja i varira u zavisnosti od segmenta ljudskog života i delatnosti, te se kao takav različito definiše i vrednuje. Prema standardu ISO 31000: 2009, rizik se definiše kao ***uticaj neizvesnosti na ciljeve***. Ova definicija uključuje i pozitivan i negativan uticaj na ostvarenje ciljeva. Ne postoji pozitivan ili negativan rizik, već samo rizik. Savremena teorija, u najširem i najgeneralizovanijem definisanju rizika, nalazi da pojam rizika sadrži uvek dva osnovna elementa: *izloženost* i *neizvesnost*.

Sam pojam osiguranja označava sigurnost, obezbeđenje, poverenje u nešto i uopšteno izražava svrhu osiguranja koja se sastoji u pružanju neke sigurnosti.

Osiguranje u najširem smislu predstavlja zaštitu imovinskih interesa fizičkih i pravnih lica prilikom realizacije rizika, odnosno prilikom nastupanja osiguranih slučajeva, i to na račun fondova osiguranja formiranih naplatom premije od tih lica.

Da bi se rizik mogao osigurati, neophodno je da bude ispunjen uslov mogućnosti njegove procene, odnosno utvrđivanja verovatnoće njegovog ostvarenja, na osnovu podataka o njegovoj realizaciji u prethodnom periodu. Oni rizici čije je nastupanje izvesno (sigurno) se ne mogu osigurati, kao ni rizici čije ostvarenje nije moguće predvideti.

Ukoliko ne postoje podaci iz prethodnog perioda, nemoguće je odrediti verovatnoću nastanka rizika, odnosno nastupanja osiguranog slučaja u budućnosti. Samim tim, nije moguće utvrditi ni njegove finansijske posledice (štetu), niti je moguće izvršiti raspodelu štete na sve osiguranike iz određene grupe rizika i odrediti učešće (premiju osiguranja) svakog od osiguranika koju treba da plate kako bi im šteta bila nadoknađena.

Osiguranjem se bave specijalizovane organizacije (osiguravači), koje obezbeđuju akumuliranje naplaćenih premija osiguranja, stvarajući na taj način fondove iz kojih se vrši isplata naknada u slučaju ostvarenja osiguranih slučajeva. Uspostavljanjem odnosa između osiguravača i osiguranika ispoljava se ekonomska suština osiguranja. Osiguranje predstavlja poseban vid ekonomske delatnosti koji se vezuje za preraspodelu rizika između pojedinaca (osiguranika) ugroženih istim opasnostima.

1.2. Lica u osiguranju

Osiguravač

Strana u ugovoru o osiguranju koja za određenu cenu (premiju) preuzima obavezu zaštite osiguranika od rizika. Ukoliko dođe do ostvarenja rizika, tj. nastupanja osiguranog slučaja, osiguravač ima obavezu da isplati naknadu iz osiguranja osiguraniku. Osiguravač je specijalizovana organizacija koja se bavi osiguranjem. Postoje privatne i državne osiguravajuće kompanije.

Osiguranik

Lice koje zaključuje ugovor o osiguranju u svoje ime i za svoj račun, i obavezuje se da plaća određenu cenu (premiju) za ustupljeni rizik. U slučaju realizacije rizika ima pravo na naknadu iz osiguranja.

Korisnik osiguranja

Lice koje se ne pojavljuje kao ugovorna strana, niti zaključuje ugovor o osiguranju niti plaća premiju, ali dobija naknadu ukoliko dođe do osiguranog slučaja, odnosno do neke štete. *(npr. roditelj zaključi ugovor o osiguranju, plati premiju, a ukoliko mu se nešto dogodi, naknada se isplaćuje njegovim naslednicima – deci).*

1.3. Polisa osiguranja

Polisa osiguranja predstavlja najznačajniji dokument u osiguranju. Ona predstavlja ispravu koja prati ugovor o osiguranju.

Sadrži najvažnije elemente zaključenog ugovora: predmet osiguranja, ugovorne strane, rizik obuhvaćen osiguranjem, trajanje osiguranja i vreme pokrića, datum izdavanja polise, potpisi ugovornih strana.

1.4. Podela osiguranja

Najznačajnija podela osiguranja je prema predmetu osiguranja i to na:

- osiguranje imovine i
- osiguranje lica.

1.4.1. Osiguranje lica

Osiguranje lica se po mnogo čemu razlikuje od osiguranja imovine. Cilj osiguranja lica nije naknada štete prouzrokovane osiguranim slučajem, već isplata unapred utvrđene osigurane sume.

Kod osiguranja lica bitni su sledeći elementi:

• Osigurana suma je veoma bitan element koji određuje kolika će biti visina premije. Kada nastupi osigurani slučaj, osiguravač je dužan da isplati osiguraniku osiguranu sumu na način kako je ugovoreno u polisi osiguranja (u celini ili u određenom delu), bez obzira na visinu štete koja je nastala. Osigurana suma se utvrđuje i isplaćuje nezavisno od iznosa moguće štete.

• Osiguranik stiče pravo na isplatu osigurane sume nastupanjem osiguranog slučaja, bez obaveze da dokaže štetu koju je pretrpeo, kao i njenu visinu.

Osiguranje lica predstavlja specifičnu vrstu osiguranja, gde se ostvareni rizici kod osiguranih lica nikada ne mogu nadoknaditi, ali se mogu ublažiti posledice nastupanja rizika materijalnom nadoknadom, odnosno isplatom osigurane sume. Prema tome, može se reći da objedinjuje funkciju osiguranja i funkciju štednje. Osiguravajuća zaštita obezbeđuje ekonomsku i socijalnu sigurnost osiguranika. Štednja je namenska, kontinuirana i dugoročna. Zahvaljujući funkciji štednje, iz osiguranja života proizilazi obaveza isplate osigurane sume u slučaju ostvarenja rizika (*doživljenja ugovorenog vremenskog perioda, u slučaju smrti itd.*). Da bi se ostvarila ekvivalentnost svih uplata (premija) sa isplatama (obavezama osiguravača), tokom trajanja osiguranja formira se tzv. *matematička rezerva*.

2. OSIGURANJE ŽIVOTA

2.1. Pojam životnog osiguranja

Životno osiguranje predstavlja ugovor kojim se osiguranik obavezuje da plaća premiju osiguranja, a osiguravač se obavezuje da isplati osiguraniku (za slučaj doživljenja određenog broja godina) ili licu koje on odredi (u slučaju smrti osiguranika) određenu osiguranu sumu.

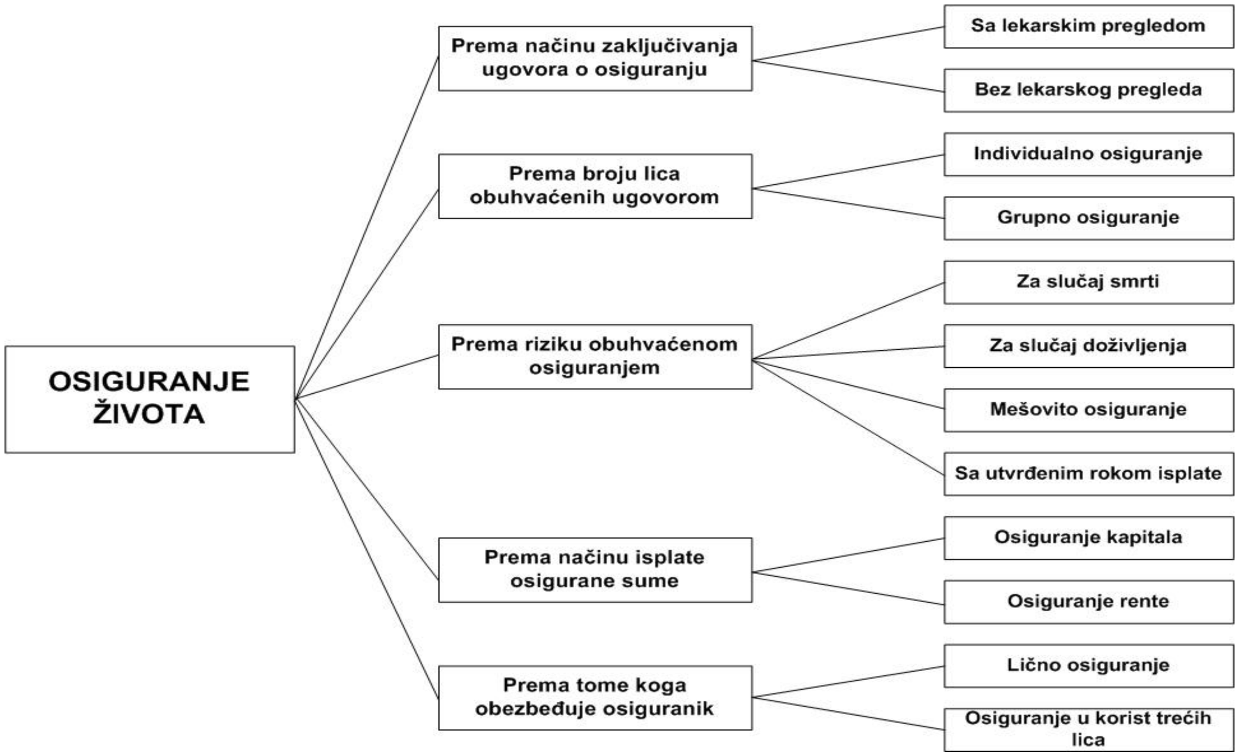
Osiguranje života se odnosi na sve vrste osiguranja kod kojih prestankom ili trajanjem života jednog lica (osiguranika) dolazi do isplate osigurane sume od strane osiguravača. Predstavlja oblik obezbeđenja neophodne zaštite samom ugovaraču ili licima koja su bliska ugovaraču u slučaju nesreće koja ga može zadesiti.

2.2. Vrste životnog osiguranja

U zavisnosti od kriterijuma prema kojima se vrši podela, postoje različite vrste osiguranja života:

I. prema načinu zaključivanja ugovora o osiguranju
II. prema broju lica koja su obuhvaćena ugovorom
III. prema riziku obuhvaćenom osiguranjem
IV. prema načinu isplate osigurane sume
V. prema tome koga osiguranik obezbeđuje.

Podela životnog osiguranja prikazana je na Slici 1.



Slika 1. *Podela životnog osiguranja*

I *Prema načinu zaključivanja ugovora*, osiguranje života se može zaključiti ***sa lekarskim pregledom*** i ***bez pregleda***. Kod osiguranja života sa velikim osiguranim sumama, praktikuje se lekarski pregled. Naime, za utvrđivanje okolnosti za procenu rizika kod osiguranja života (osiguranje za slučaj smrti, osiguranje za slučaj doživljenja, mešovito osiguranje) bitan je lekarski pregled. Od toga da li je pregled izvršen pre zaključenja ugovora, zavise i obaveze osiguravača.

Ukoliko kod osiguranja za slučaj smrti osigurani slučaj nastupi u toku prvih 6 meseci trajanja osiguranja, a nije izvršen lekarski pregled, osiguravač je dužan da isplati 50% osigurane sume. Ukoliko je izvršen lekarski pregled u navedenom slučaju, osigurana suma se isplaćuje u celosti, bez obzira na to koliko je dugo trajalo osiguranje.

II *Prema broju lica koja su obuhvaćena ugovorom*, osiguranje života se deli na individualno i grupno. ***Individualno osiguranje*** života sprovodi se putem individualnih, posebnih ugovora za svakog pojedinačnog osiguranika (npr. osiguranje pojedinca za slučaj doživljenja određene starosti). ***Grupno osiguranje*** života odnosi se na osiguranje članova različitih stručnih udruženja, društava i organizacija jednom zajedničkom polisom.

Osiguravač nije obavezan da isplati osiguranu sumu, ukoliko smrt osiguranika nastupi usled: ratnih događaja, izvršenja smrtne kazne po sudskoj presudi, pripreme, pokušaja ili izvršenja krivičnog dela za koje je predviđena kazna strogog zatvora ili teža kazna, kao i ako osiguranikovu smrt namerno prouzrokuje određeni korisnik osiguranja.

III *Prema riziku obuhvaćenom osiguranjem*, osiguranje života može biti: za slučaj smrti, za slučaj doživljenja, mešovito osiguranje, sa utvrđenim rokom isplate.

a) Osiguranje za slučaj smrti

Nastupanje osiguranog slučaja kod ovog osiguranja vezuje se za momenat smrti osiguranika. Može se ugovoriti da smrt osiguranog lica predstavlja osigurani slučaj bez obzira na vreme kada se desi (doživotno osiguranje) ili samo onda kada se ostvari u jednom određenom periodu (privremeno osiguranje).

b) Osiguranje za slučaj doživljenja

Kod ove vrste osiguranja, osigurani rizik se realizuje kada osigurano lice doživi određeni broj godina. Ukoliko je osigurano lice još uvek živo u unapred predviđenom trenutku vremena, osiguravač je dužan da isplati osiguranu sumu. Osnovni cilj zaključenja ovakvog ugovora jeste, pre svega, obezbeđenje osiguranika u slučaju starosti.

c) Mešovito osiguranje

Predstavlja spajanje osiguranja za slučaj smrti sa osiguranjem za slučaj doživljenja. Osiguravač je u svakom slučaju obavezan da isplati osiguranu sumu, bilo određenim korisnicima (ukoliko smrt osiguranog lica nastupi pre isteka trajanja osiguranja) ili osiguranom licu (ako ono doživi ugovoreni rok). Ovo osiguranje je najpovoljniji vid osiguranja, jer se osiguranik obezbeđuje za slučaj doživljenja, a i njegovi naslednici za slučaj smrti.

d) Osiguranje sa uvrđenim rokom isplate

Kod ove vrste osiguranja, osiguravač je obavezuje da isplati osiguranu sumu osiguraniku ili korisnicima osiguranja u trenutku isteka roka koji je utvrđen u polisi. Ako osigurano lice umre pre roka utvrđenog u polisi, osigurana suma biće isplaćena njegovim naslednicima (ili drugim naznačenim korisnicima), a obaveza plaćanja premije osiguranja prestaje. Ako je osigurano lice živo u momentu isteka osiguranja, onda se osigurana suma isplaćuje njemu samom ili drugim korisnicima.

IV *Prema načinu isplate osigurane sume*, osigurana suma može biti isplaćena odjednom u jednokratnom iznosu korisniku polise (***osiguranje kapitala***) ili može biti isplaćivana u vidu višekratnih iznosa tokom određenog vremenskog perioda (***osiguranje rente***).

V *Prema tome koga obezbeđuje osiguranik*, životno osiguranje se deli na lično osiguranje i osiguranje u korist trećih lica. ***Lično osiguranje*** života je vid osiguranja gde osiguranik prilikom nastupanja osiguranog slučaja lično prima osiguranu sumu (u slučaju doživljenja određene starosti, u slučaju invaliditeta, gubitka radne sposobnosti itd.). Kod ***osiguranja u korist trećih lica*** osiguranik želi da, u slučaju svoje smrti ili gubitka radne sposobosti, obezbedi članove svoje porodice ili neka druga lica koja su unapred naznačena kao korisnici osiguranja.

2.3. Tehničke osnove u osiguranju života

Osnovna funkcija osiguranja sastoji se u nadoknadi štete osiguranicima u slučaju realizacije rizika koji je definisan u ugovoru o osiguranju. Da bi se ostvarila ova funkcija, osiguravač mora da obezbedi dovoljno sredstava na bazi uplaćenih premija, tako da u svakom momentu može da ispuni svoje obaveze prema osiguranicima, a da pri tome ne ugrozi svoju likvidnost. Obračun premija je osnovni zadatak aktuarske matematike.

Aktuarska matematika je grana primenjene matematike koja obrađuje matematičke osnove osiguranja. Predmet izučavanja aktuarske matematike u osiguranju života je obračun tarifa životnog osiguranja.

Aktuarska matematika je u tesnoj vezi sa finansijskom matematikom, jer uvažava koncept vremenske vrednosti novca, koji omogućava poređenje uplata i isplata u osiguravajućoj kompaniji, nastalih u različitim vremenskim trenucima. Osnovni princip finansijske matematike – *princip ekvivalentnosti*, po kome je zbir svih uplata svedenih na isti vremenski trenutak jednak zbiru svih isplata svedenih takođe na taj vremenski trenutak, predstavlja i osnovni princip aktuarske matematike.

Kod rešavanja problema osiguranja života veoma je bitno voditi računa o jednoj nepoznatoj veličini, a to je **čas smrti čoveka**. Ta nepoznata veličina ulazi u aktuarske obračune, što ih čini komplikovanijim. Međutim, zahvaljujući prirodnom zakonu – Zakonu velikih brojeva, aktuarski obračuni daju zadovoljavajuće rezultate.

2.3.1. Zakon velikih brojeva

Zakon velikih brojeva je osnovni zakon u teoriji verovatnoće i statistici. Formulisao ga je švajcarski matematičar Jacob Bernoulli, a kasnije ga je uopštio francuski matematičar Simeon Denis Poisson.

Suština ovog prirodnog zakona sastoji se u tome da, ukoliko se posmatra veliki broj slučajeva, uočavaju se određene pravilnosti u nastupanju jednog događaja. Pri tome, što je broj posmatranih slučajeva veći, pravilnost jače dolazi do izražaja, a odstupanja su manja. Ako se određeni događaj posmatra pojedinačno, on predstavlja slučaj, a u velikom broju posmatranja postaje zakonitost. Zakonitost se ispoljava samo u masi slučajeva, ona nije vidljiva kod pojedinačnih jedinica. Na primer, ukoliko je od 10 ljudi određene starosti umrlo 5, to ne znači da je verovatnoća smrti za ljude te starosti 50%.

Zna se da svaki čovek mora umreti, ali se ne može unapred znati kada će umreti. Međutim, ukoliko se posmatra velika grupa ljudi, ne zna se kada će pojedinci u toj grupi umreti, ali se zna da će godišnje u toj grupi umreti određeni broj ljudi, koji se može odrediti sa zadovoljavajućom tačnošću.

Zakon velikih brojeva ima veoma veliki značaj u osiguranju. Zahvaljujući njemu, za osiguravača postoji pravilnost i zakonitost kod ukupnog broja pokrivenih rizika. Što je broj osiguranih jedinica veći, to je i trajanje osiguranja duže, ostvarenje određenog slučaja ravnomernije i bliže očekivanom. Zato je kod mnoštva osiguranih slučajeva veća mogućnost određivanja budućih obaveza, na osnovu čega se obezbeđuje visina sredstava potrebnih za njihovo pokriće.

2.3.2. *Teorija verovatnoće*

Teorija verovatnoće je sa Zakonom velikih brojeva odigrala odlučujuću ulogu u razvoju modernog osiguranja. Zahvaljujući njenoj primeni u osiguranju, nesrećni slučajevi se više ne smatraju nepredvidivim, već se na njih gleda kao na pojave koje se mogu predvideti zahvaljujući određenim pravilnostima.

Da bi osiguranje uspešno izvršavalo svoje funkcije, neophodno je odrediti verovatnoću nastupanja ekonomski štetnih događaja kod različitih osiguranih lica, kako bi se na osnovu toga utvrdila premija osiguranja. Polazi se od pretpostavke da će se događaji i u budućnosti odvijati u skladu sa verovatnoćom, izračunatom na osnovu iskustva iz prošlosti. Pri tome se odstupanja od izračunate verovatnoće smatraju normalnom pojavom. Ova odstupanja u velikim serijama pokazuju neku zakonitost pomoću koje se može korigovati utvrđena verovatnoća, u cilju što tačnije ocene rizika i ispravnijeg proračuna cene tog rizika, odnosno premije. Stepen verovatnoće nastajanja osiguranog slučaja je element koji određuje visinu premije. Ukoliko je verovatnoća nastupanja štetnog događaja veća, rizik je „lošiji“, a tada je i premija veća. Obrnuto, rizik je „bolji“ ukoliko je verovatnoća nastupanja štetnog događaja manja i u tom slučaju je i premija niža. Pomoću Teorije verovatnoće i Zakona velikih brojeva može se uspostaviti jednakost između neto premija i rizika koje te premije treba da pokriju.

U II delu biće izvršeno detaljno upoznavanje sa osnovnim pojmovima teorije verovatnoće i predstavljanje formula koje će biti potrebne kako bi se izvršili proračuni.

3. AKTUARSKE OSNOVE OBRAČUNA TARIFA U ŽIVOTNOM OSIGURANJU

3.1. Računske osnove kod obračuna tarifa u osiguranju života – Tablice smrtnosti

Računske osnove za obračun tarifa u osiguranju života čine tablice smrtnosti. Tablice smrtnosti sadrže niz pokazatelja od kojih je osnovni pokazatelj ***izravnata verovatnoća smrtnosti,*** na osnovu koje se izračunavaju sve ostale biometrijske funkcije: verovatnoća doživljenja, kretanje broja živih i broja umrlih u okviru određenog skupa, izračunatih na osnovu izravnatih verovatnoća smrti. Pomoću ovako dobijenih vrednosti broja živih i broja umrlih lica i odgovarajuće kamatne stope, izračunavaju se *komutativni brojevi* koji služe za obračun neto premija u osiguranju života.

Tablice smrtnosti se konstruišu na dva načina: direktnom i indirektnom metodom. Po **direktnoj metodi**, posmatra se određeni broj novorođenih, tok njihovog života, kako bi se na kraju na osnovu lista umrlih utvrdilo koliko lica ostane živo u prvoj godini života, zatim u sledećoj, sve dok poslednje od tih lica ne umre. Ovako sastavljene tablice smrtnosti predstavljale bi odraz toka izumiranja jedne stvarno postojeće generacije i ovaj metod je praktično neizvodljiv, budući da se suočava sa nesavladivim tehničkim poteškoćama. Iz ovih razloga se najčešće koristi samo kao dopuna indirektne metode.

Prema **indirektnoj metodi**, posmatra se istovremeno više generacija, odnosno grupa lica različite starosti, i na osnovu materijala koji se prikupi, utvrđuju se verovatnoće smrti za pojedine klase starosti. Zatim se, pomoću proizvoljno odabranog velikog broja lica, računskim putem određuje broj živih za pojedine klase starosti. Tablica smrnosti sastavljena prema ovoj metodi predstavlja red izumiranja jedne zamišljene (fiktivne) grupe lica. Iz ovih praktičnih i tehničkih razloga, ovaj metod se jedini upotrebljava za izradu tablica smrtnosti.

Potreba da se tablice smrtnosti za svrhe osiguranja života konstruišu na osnovu posmatranja što većeg i obimnijeg materijala, kako bi se dobile što tačnije verovatnoće smrti za svaku klasu starosti, dovela je do udruživanja više osiguravajućih društava radi izrade tablica smrtnosti na osnovu zajednički prikupljenog materijala. Na ovaj način sastavljene su *Tablice smrtnosti 17 engleskih društava*, *Tablice smrtnosti 23 nemačka društva* itd. Za potrebe proračuna u ovoj oblasti biće korišćena Tablica smrtnosti 17 engleskih društava, koja je data u PRILOGU 1.

3.1.1. Detaljne tablice smrtnosti za Republiku Srbiju za period 2010.–2012.

Republički zavod za statistiku objavljuje detaljne tablice smrtnosti za Republiku Srbiju, za period od 2010. do 2012. godine. Do sada su objavljene detaljne tablice smrtnosti izrađene za periode 1952.–1954, 1960.–1962, 1970.–1972, 1980.–1982, 1990.–1992. godine, za stanovništvo celokupne teritorije tadašnje SFRJ, odnosno SRJ, i sve republike i pokrajine, a potom i za period 2001.–2003. godine, za Republiku Srbiju, centralnu Srbiju i Vojvodinu.

Detaljne tablice smrtnosti za period 2010.–2012. godine baziraju se na rezultatima Popisa stanovništva, domaćinstava i stanova 2011. godine i na statistici prirodnog kretanja stanovništva tokom 2010., 2011. i 2012. godine. Za izradu ovih tablica smrtnosti korišćen je *Becker-Zeuner metod*, a obzirom na to da je isti metod korišćen i prilikom izrade prethodnih tablica smrtnosti, moguća je uporedivost osnovnih pokazatelja.

U ovim tablicama, pokazatelji su izrađeni za ukupno stanovništvo, po polu i pojedinačnim godinama starosti i to za teritoriju Republike Srbije, za teritorijalne funkcionalne celine Srbiju – sever i Srbiju – jug i regione koji ulaze u njihov sastav (Beogradski region, Region Vojvodine, Region Šumadije i Zapadne Srbije, Region Južne i Istočne Srbije). Pored toga, tablice su izrađene i na opštinskom nivou.

Tablice smrtnosti su osnovni demografski alat za analiziranje smrtnosti stanovništva i predstavljaju tabelarni prikaz smrtnosti po starosti i polu. Polazeći od verovatnoće smrti, osnovnog demografskog pokazatelja u tablicama smrtnosti, računaju se i sve ostale biometrijske funkcije: verovatnoća doživljenja, broj živih, srednje ili očekivano trajanje života i dr.

Osim primene u demografske svrhe pri analizi smrtnosti, tablice smrtnosti se koriste pri izradi demografskih projekcija stanovništva za postavljanje hipoteza o budućem kretanju smrtnosti, kao i za izračunavanje neto stope reprodukcije ženskog stanovništva. Od posebne su važnosti i za aktuarstvo i životno osiguranje, jer služe kao tehnička osnova formiranja tarifa u osiguranju.

Prema izvoru podataka i postupku izrade postoje dve vrste tablica: ***detaljne (potpune)*** tablice smrtnosti po pojedinačnim godinama starosti i ***skraćene (aproksimativne)*** tablice smrtnosti po petogodišnjim starosnim grupama.

3.1.1.1. Izvori podataka

Detaljne tablice smrtnosti prema pojedinačnim godinama starosti i polu, za period 2010.–2012. godine, izrađene su na osnovu rezultata Popisa satanovništva, domaćinstava i stanova 30. septembra 2011. godine i rezultata statistike prirodnog kretanja stanovništva za 2010., 2011. i 2012. godinu, i to:

1. Broj stanovnika prema kalendarskoj godini rođenja i polu iz Popisa stanovništva 30. septembra 2011. godine;
2. Broj živorođene dece prema polu u 2010. i 2011. godini, iz statističkog istraživanja o rođenima;
3. Broj umrlih prema kalendarskoj godini rođenja i polu, i to: broj umrlih posle rođendana u 2010. godini, broj umrlih pre i posle rođendana i pre i posle Popisa stanovništva u 2011. godini i broj umrlih pre rođendana u 2012. godini, iz statističkog istraživanja o umrlima.

Ranije tablice smrtnosti izrađivane su za veće teritorijalne celine, dok su poslednje detaljne tablice smrtnosti za period 2010.–2012. godine urađene i za regione i okruge, kao i na opštinskom nivou.

3.1.1.2. Formiranje baznog skupa podataka

Svi potrebni ulazni podaci sakupljeni iz navedenih izvora integrišu se na odgovarajući način u bazni skup predstavljen kao matrica podataka. U prvu kolonu upisuje se šifra opštine ili teritorijalne celine za koju se tablice računaju, a u drugu kolonu upisuje se šifra za pol. Naredne kolone sadrže podatke o broju stanovnika i broju umrlih za kalendarske godine rođenja od 1911. do 2011. godine. Simboli koji se koriste za oznaku ovih podataka u baznom skupu su:

- $\boldsymbol{n}$ – redni broj kalendarske godine
- $\boldsymbol{V_n}$ – broj stanovnika u popisu koji su rođeni u toku n-te kalendarske godine
- $\boldsymbol{U_{n,m}}$ – broj umrlih u periodu 2010.–2012., a rođenih u toku n-te kalendarske godine, prema navršenosti godina života, gde je m redni broj kolone u matrici baznog skupa.

Kao primer, u Tabeli 1 prikazan je formiran bazni skup za Grad Beograd.

Tabela 1. *Podaci o muškom stanovništvu za Grad Beograd prema Popisu u 2011. i podaci o umrlim 2010., 2011. i 2012. godine*

Територијална целина (шифра)	Пол (шифра) *Sex (code)*	Календарска година рођења *Calendar year of birth*	Редни број (n) *Ordinal number (n)*	Становништво (Попис 2011) *Population (2011 Census)*	Умрли (U) / *Deaths*						*Territorial unit (code)*
					2010	2011				2012	
					после рођендана *after birthday*	пре рођендана *before birthday*		после рођендана *after birthday*		пре рођендана *before birthday*	
						пре Пописа *before Census*	после Пописа *after Census*	Пре Пописа *before Census*	после Пописа *after Census*		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
RS111	1	2011	1	6388	0	31	12	0	0	4	RS111
RS111	1	2010	2	8887	59	5	1	1	1	3	RS111
RS111	1	2009	3	8549	3	1	0	0	0	1	RS111
RS111	1	2008	4	8430	0	1	0	0	1	1	RS111
RS111	1	2007	5	7880	1	0	0	1	0	1	RS111
RS111	1	2006	6	7922	0	0	0	0	0	0	RS111
RS111	1	2005	7	7925	0	0	0	0	1	0	RS111
RS111	1	2004	8	8022	0	0	0	0	0	0	RS111
RS111	1	2003	9	7905	0	0	0	0	1	0	RS111
RS111	1	2002	10	8001	0	0	0	0	1	1	RS111
RS111	1	2001	11	7885	0	1	0	1	1	0	RS111
RS111	1	2000	12	7299	0	0	0	1	3	0	RS111
RS111	1	1999	13	7349	0	0	0	0	0	0	RS111
RS111	1	1998	14	7417	0	1	0	0	0	2	RS111
RS111	1	1997	15	7749	1	2	0	0	0	0	RS111
RS111	1	1996	16	8310	0	0	0	0	0	1	RS111
RS111	1	1995	17	8656	2	1	0	0	0	3	RS111
RS111	1	1994	18	8635	2	4	0	1	0	0	RS111
RS111	1	1993	19	8611	2	2	0	2	0	1	RS111
RS111	1	1992	20	8805	1	2	2	2	1	3	RS111
RS111	1	1991	21	9331	2	2	0	2	2	1	RS111
RS111	1	1990	22	9319	1	3	0	1	0	1	RS111
RS111	1	1989	23	9542	4	3	0	1	0	4	RS111
RS111	1	1988	24	10193	5	0	0	3	3	6	RS111
RS111	1	1987	25	10648	6	3	1	3	6	1	RS111
RS111	1	1986	26	10932	4	1	0	0	5	5	RS111
RS111	1	1985	27	11405	3	6	0	7	7	1	RS111
RS111	1	1984	28	12337	6	5	0	1	1	9	RS111
RS111	1	1983	29	12840	4	5	1	3	4	6	RS111
RS111	1	1982	30	12789	1	6	0	1	0	7	RS111
RS111	1	1981	31	12777	10	4	1	3	2	7	RS111
RS111	1	1980	32	13285	4	7	2	3	4	4	RS111
RS111	1	1979	33	13217	9	7	0	4	4	10	RS111
RS111	1	1978	34	13130	6	8	1	5	3	12	RS111
RS111	1	1977	35	12962	6	9	0	1	4	7	RS111
RS111	1	1976	36	12702	9	5	0	6	3	12	RS111
RS111	1	1975	37	12432	14	8	2	4	2	11	RS111
RS111	1	1974	38	12157	4	11	0	8	5	8	RS111
RS111	1	1973	39	11993	7	4	0	3	6	15	RS111
RS111	1	1972	40	11143	12	8	0	4	1	4	RS111
RS111	1	1971	41	11379	5	13	0	8	5	13	RS111
RS111	1	1970	42	11183	16	8	2	5	4	10	RS111
RS111	1	1969	43	10844	9	13	0	5	4	10	RS111
RS111	1	1968	44	10352	14	8	1	9	11	14	RS111
RS111	1	1967	45	10397	12	16	0	10	9	14	RS111
RS111	1	1966	46	10042	15	19	1	2	6	9	RS111
RS111	1	1965	47	10377	22	13	2	10	15	14	RS111
RS111	1	1964	48	10070	15	22	1	14	17	24	RS111
RS111	1	1963	49	10324	21	18	2	14	10	21	RS111
RS111	1	1962	50	10251	30	29	2	15	16	29	RS111
RS111	1	1961	51	10478	35	23	1	20	12	44	RS111

Nastavak Tabele 1. *Podaci o muškom stanovništvu za Grad Beograd prema Popisu u 2011. i podaci o umrlim 2010., 2011. i 2012. godine*

RS111	1	1960	52	10621	36	43	1	20	17	34	RS111
RS111	1	1959	53	10426	44	37	3	21	15	33	RS111
RS111	1	1958	54	10673	37	42	3	24	20	49	RS111
RS111	1	1957	55	10552	42	51	1	30	28	48	RS111
RS111	1	1956	56	11724	67	56	4	39	30	61	RS111
RS111	1	1955	57	12093	70	57	2	35	25	75	RS111
RS111	1	1954	58	12832	91	87	4	43	39	80	RS111
RS111	1	1953	59	12480	98	83	7	49	45	90	RS111
RS111	1	1952	60	12839	112	80	5	57	51	103	RS111
RS111	1	1951	61	11258	110	76	5	63	36	80	RS111
RS111	1	1950	62	12135	104	82	7	61	61	111	RS111
RS111	1	1949	63	11327	116	97	5	60	62	115	RS111
RS111	1	1948	64	10560	108	91	5	51	44	113	RS111
RS111	1	1947	65	9916	103	104	4	48	52	111	RS111
RS111	1	1946	66	8302	80	110	9	48	50	125	RS111
RS111	1	1945	67	6087	72	69	3	50	37	81	RS111
RS111	1	1944	68	6110	91	75	5	48	37	91	RS111
RS111	1	1943	69	5845	82	85	4	42	27	101	RS111
RS111	1	1942	70	6277	99	81	5	62	48	100	RS111
RS111	1	1941	71	6743	117	120	4	65	62	106	RS111
RS111	1	1940	72	6908	131	134	4	75	50	133	RS111
RS111	1	1939	73	6668	125	137	5	77	69	142	RS111
RS111	1	1938	74	6541	144	137	9	83	69	134	RS111
RS111	1	1937	75	6367	171	157	3	105	79	153	RS111
RS111	1	1936	76	6127	178	168	6	96	77	170	RS111
RS111	1	1935	77	5873	182	169	6	103	80	175	RS111
RS111	1	1934	78	5588	186	180	8	118	89	189	RS111
RS111	1	1933	79	4910	199	196	7	100	80	195	RS111
RS111	1	1932	80	4396	182	176	2	105	88	203	RS111
RS111	1	1931	81	3860	177	190	7	102	82	183	RS111
RS111	1	1930	82	3453	171	171	14	110	83	187	RS111
RS111	1	1929	83	2813	185	149	6	96	73	164	RS111
RS111	1	1928	84	2356	161	128	7	86	69	183	RS111
RS111	1	1927	85	2225	153	150	3	78	62	171	RS111
RS111	1	1926	86	1912	160	154	8	71	53	115	RS111
RS111	1	1925	87	1523	120	129	6	61	53	117	RS111
RS111	1	1924	88	1200	111	104	9	54	52	108	RS111
RS111	1	1923	89	852	90	93	1	49	34	92	RS111
RS111	1	1922	90	675	93	72	6	46	25	67	RS111
RS111	1	1921	91	525	62	49	4	31	31	59	RS111
RS111	1	1920	92	353	64	42	3	34	28	47	RS111
RS111	1	1919	93	186	30	36	2	8	10	40	RS111
RS111	1	1918	94	64	10	7	0	4	2	12	RS111
RS111	1	1917	95	55	10	5	0	5	5	11	RS111
RS111	1	1916	96	28	9	5	0	3	5	4	RS111
RS111	1	1915	97	34	10	7	0	6	5	5	RS111
RS111	1	1914	98	39	10	8	0	6	7	3	RS111
RS111	1	1913	99	9	6	3	0	3	0	1	RS111
RS111	1	1912	100	10	6	1	1	1	0	3	RS111
RS111	1	1911	101	9	0	1	1	0	0	3	RS111

3.1.1.3. Definisanje skupova živih i umrlih

Za izbor skupova živih (L_x) i umrlih (T_x) i njihovo stavljanje u međusobni odnos, prilikom izrade detaljnih tablica smrtnosti, primenjen je već pomenuti *Becker-Zeuner metod*. Na osnovu podataka iz baznog skupa o broju stanovnika po kalendarskoj godini rođenja i umrlim po godinama rođenja i starosti, računaju se svi skupovi živih i umrlih za stanovništvo starije od jedne godine. Za odojčad (stanovništvo mlađe od jedne navršene godine života) skupovi se računaju na osnovu podataka o umrloj odojčadi u periodu 2010.–2011. godine i broju živorođene dece za 2010. i 2011. godinu, dok se za decu staru godinu dana, skupovi računaju na osnovu podataka o broju živorođene dece u 2010. godini i broju umrle dece sa navršenom jednom godinom života.

Skup živih (L_0) i skup umrlih (T_0) za 0 godina života računaju se prema sledećim obrascima:

$$\boldsymbol{L_0} = {}_{2010}\boldsymbol{N} + {}_{2011}\boldsymbol{N} \quad (1)$$

$$\boldsymbol{T_0} = \boldsymbol{U_{2,4}} + \boldsymbol{U_{2,5}} + \boldsymbol{U_{2,6}} + \boldsymbol{U_{1,5}} + \boldsymbol{U_{1,6}} + \boldsymbol{U_{1,9}} \quad (2)$$

Skup živih (L_1) i skup umrlih (T_1) za decu staru jednu godinu računaju se prema sledećim obrascima:

$$\boldsymbol{L_1} = \boldsymbol{V_3} + \boldsymbol{U_{3,7}} + \boldsymbol{U_{3,4}} + {}_{2010}\boldsymbol{N} - (\boldsymbol{U_{2,4}} + \boldsymbol{U_{2,5}} + \boldsymbol{U_{2,6}}) \quad (3)$$

$$\boldsymbol{T_1} = \boldsymbol{U_{3,4}} + \boldsymbol{U_{3,5}} + \boldsymbol{U_{3,6}} + \boldsymbol{U_{2,7}} + \boldsymbol{U_{2,8}} + \boldsymbol{U_{2,9}} \quad (4)$$

Za starosti x = 2, 3, ... , 99 godina, skup živih (L_x) i skup umrlih (T_x) računaju se prema obrascima:

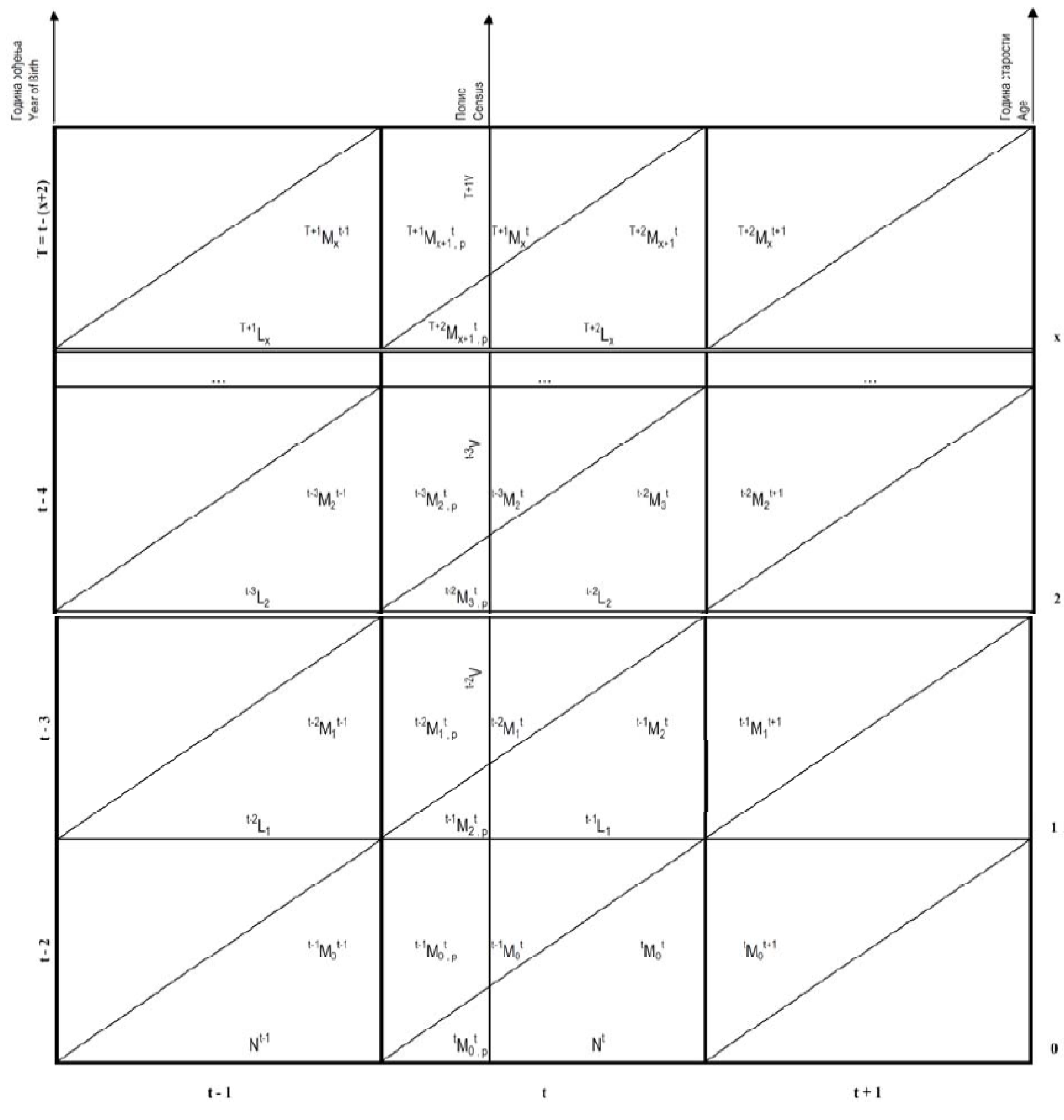
$$\boldsymbol{L_x} = \boldsymbol{V_n} - \boldsymbol{U_{n,6}} + \boldsymbol{U_{n,7}} + \boldsymbol{V_{n+1}} + \boldsymbol{U_{n+1,4}} + \boldsymbol{U_{n+1,5}} + \boldsymbol{U_{n+1,7}} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{T_x} = \boldsymbol{U_{n,7}} + \boldsymbol{U_{n,8}} + \boldsymbol{U_{n,9}} + \boldsymbol{U_{n+1,4}} + \boldsymbol{U_{n+1,5}} + \boldsymbol{U_{n+1,6}} \quad (6)$$

U navedenim obrascima primenjeni su sledeći simboli:

- $\boldsymbol{x}$ – broj navršenih godina starosti,
- $\boldsymbol{L_x}$ – broj lica rođenih u kalendarskoj godini n i $n+1$ koja su 2010. i 2011. godine navršila x godina,
- $\boldsymbol{T_x}$ – broj lica koja su na dan smrti bila stara x godina,
- $\boldsymbol{{}_tN}$ – broj živorođenih u godini t,
- $\boldsymbol{U_{n,m}}$ – broj umrlih u periodu 2010.–2012. prema navršenosti godina, gde je m redni broj kolone u Tabeli 1,
- $\boldsymbol{V_n}$ – broj stanovnika u popisu koji su rođeni u toku *n-te* kalendarske godine.

U cilju lakšeg shavatanja računskih operacija prilažu se primeri za izradu skupova živih i umrlih za stanovništvo staro 0, 1 i 2 godine. Podaci su dati u Tabeli 1 i na Slici 2.



***Slika 2**. Demografska mreža – Grad Beograd, muško stanovništvo*

$$L_0 = {}_{2010}N + {}_{2011}N = 9.385 + 9.125 = 18.510$$

$$T_0 = U_{2,4} + U_{2,5} + U_{2,6} + U_{1,5} + U_{1,6} + U_{1,9} = 59 + 5 + 1 + 31 + 12 + 4 = 112$$

$$\begin{aligned} L_1 &= V_3 + U_{3,7} + U_{3,5} + U_{3,4} + {}_{2010}N - \left(U_{2,4} + U_{2,5} + U_{2,6}\right) \\ &= 8.549 + 0 + 1 + 3 + 9.385 - (59 + 5 + 1) = 17.873 \end{aligned}$$

$$T_1 = U_{3,4} + U_{3,5} + U_{3,6} + U_{2,7} + U_{2,8} + U_{2,9} = 3 + 1 + 0 + 1 + 1 + 3 = 9$$

$$L_2 = V_3 - U_{3,6} + U_{3,7} + V_4 + U_{4,4} + U_{4,5} + U_{4,7} = 8.549 - 0 + 0 + 8.430 + 0 + 1 + 0 = 16.980$$

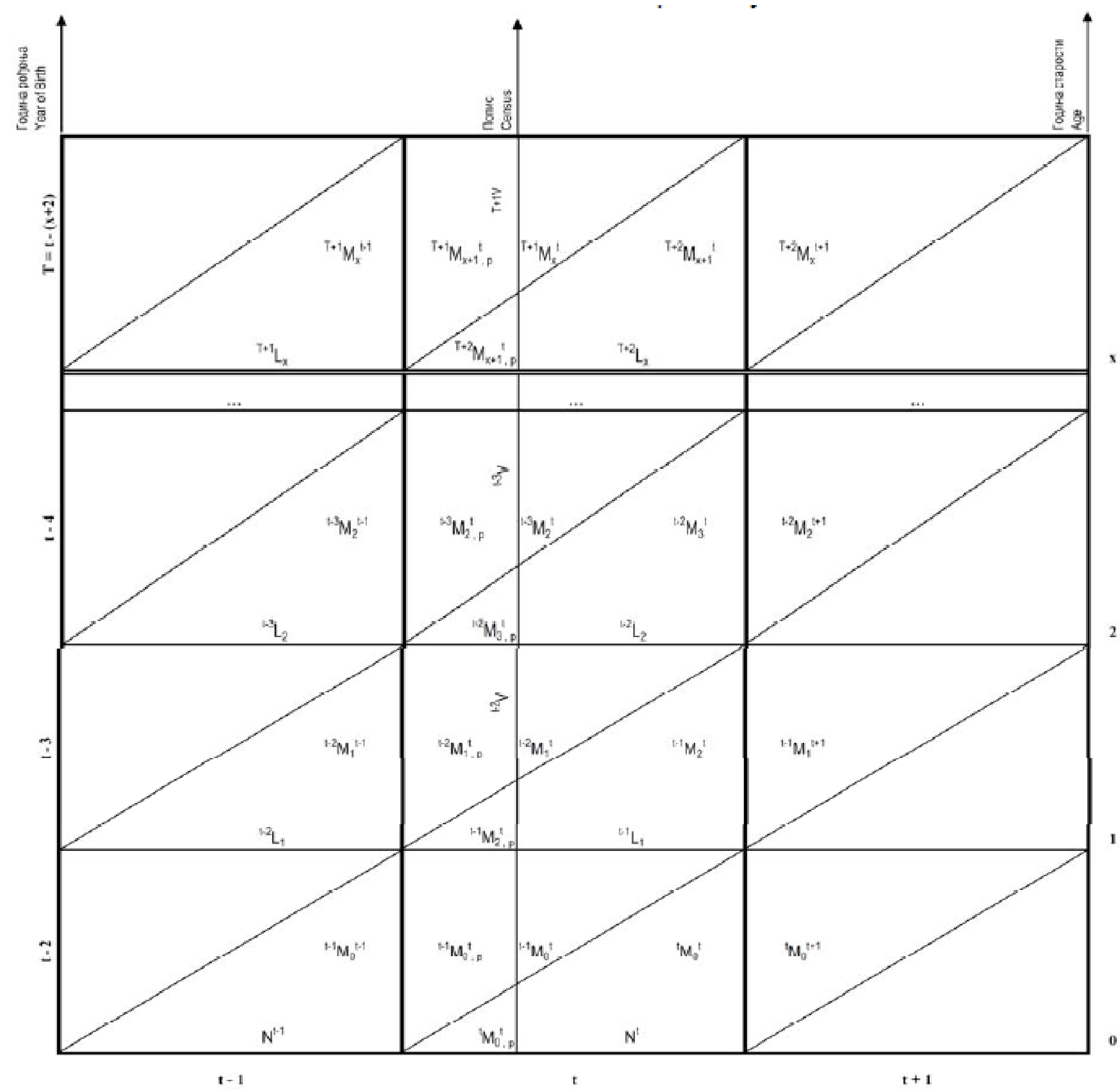
$$T_2 = U_{3,7} + U_{3,8} + U_{3,9} + U_{4,4} + U_{4,5} + U_{4,6} = 0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 2$$

3.1.1.4. Izračunavanje sirove verovatnoće smrti

Sirova verovatnoća smrti **(q'_x)** predstavlja verovatnoću da će lice staro *x* godina umreti pre nego što dosegne starost od *(x+1)* godina. To je zapravo odnos broja umrlih i broja živih starosti x godina, pa je formula za računanje sirove verovatnoće smrti:

$$\boldsymbol{q'_x = \frac{T_x}{L_x}} \tag{7}$$

Teoretsku osnovu za računanje sirove verovatnoće smrti daje *Leksisov dijagram* predstavljen na Slici 3, a na Slikama 4 i 5 prikazane su verovatnoće smrti u Republici Srbiji u periodu 2010.–2012., za muško i žensko stanovništvo, respektivno.



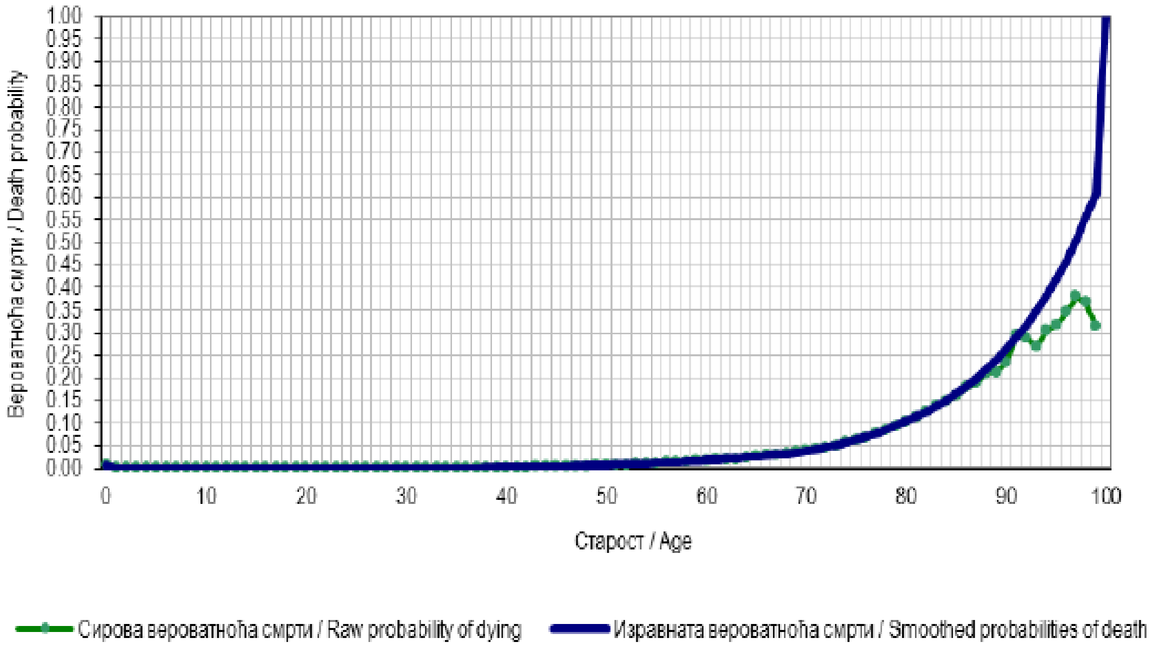
Slika 3. *Definisanje verovatnoće smrti*

Primenjeni simboli sa objašnjenjima:

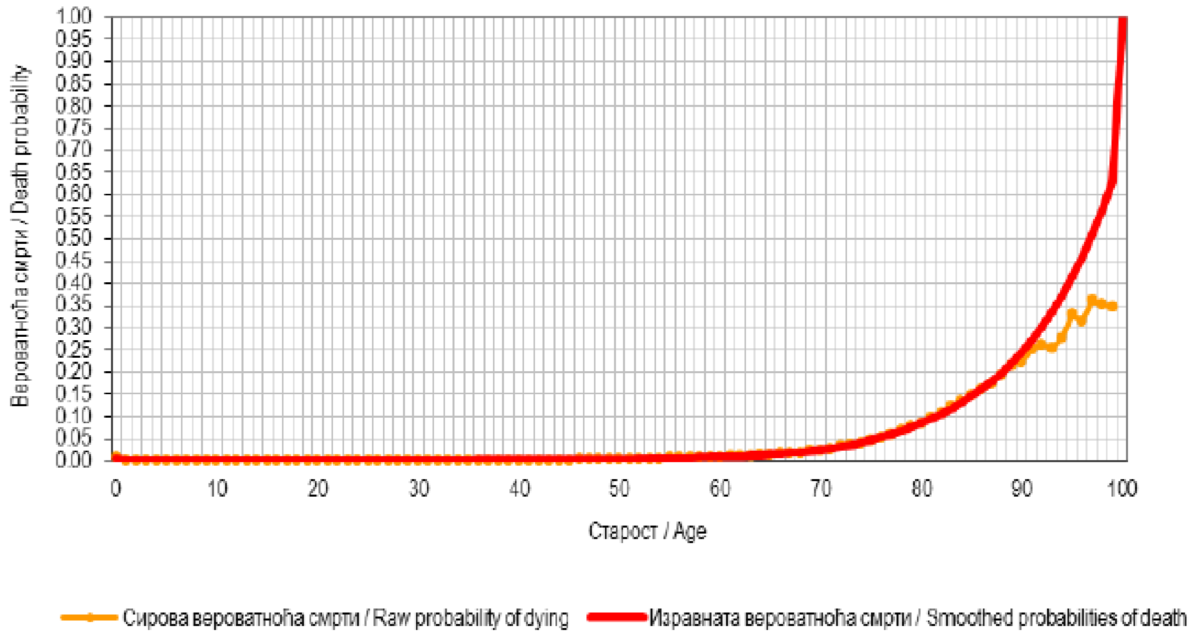
- t – godina popisa
- N^t – broj živorođenih u godini t
- ${}^{t-x}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{t}}$ – broj umrlih starosti x godina koji su rođeni u godini t-x, a umrli u godini $t+1$
- ${}^{t-x}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x,p}}^{\boldsymbol{t}}$ – broj umrlih starosti x godina koji su rođeni u godini t-x, a umrli u popisnoj godini t, posle popisa
- ${}^{t-x}L_x$ – broj živih starosti x godina koji su rođeni u godini t-x.

Opšta formula definisanja sirove verovatnoće smrti za starosti x = 2 ,…, 99 na osnovu Leksisovog dijagrama, uz korišćenje navedenih simbola, glasi:

$$\boldsymbol{q'_x = \frac{T_x}{L_x} = \frac{T_x}{{}^{t-(x+1)}L_x + {}^{t-x}L_x} = \frac{{}^{t-x}M_x^{t-1} + {}^{t-(x+1)}M_{x,p}^{t} + {}^{t-(x+1)}M_x^{t} + {}^{t-x}M_{(x+1),p}^{t} + {}^{t-x}M_{(x+1)}^{t} + {}^{t-x}M_x^{t+1}}{(V^{t-(x+1)} + {}^{t-(x+1)}M_x^{t-1} + {}^{t-(x+1)}M_{x,p}^{t} + {}^{t-(x+1)}M_{(x+1),p}^{t}) + (V^{t-x} + {}^{t-x}M_{(x+1),p}^{t} - {}^{t-x}M_x^{t})}} \quad (8)$$



Slika 4. *Verovatnoće smrti u Republici Srbiji u periodu 2010.–2012., za muško stanovništvo*



Slika 5. *Verovatnoće smrti u Republici Srbiji u periodu 2010.–2012., za žensko stanovništvo*

3.1.1.5. Metod izravnanja sirovih verovatnoća smrti

Sirove verovatnoće smrti ***(q_x)*** se računaju na osnovu skupova umrlih i živih prema Leksisovoj šemi. Usled relativno malog broja živih u većim starostima, a samim tim i malog broja umrlih, sirove verovatnoće smrti pokazuju izvesne nepravilnosti koje se ogledaju u neregularnim skokovima u nizu verovatnoća smrti. Ove nepravilnosti su naročito prisutne kada se računaju tablice na opštinskom nivou. Kako se one nisu mogle otkloniti uzimanjem u obzir podataka u distribuciji umrlih za veći broj kalendarskih godina, primenjena je **metoda izravnanja verovatnoća smrti**.

Metod izravnanja sirovih verovatnoća smrti predstavlja primenu različitih formula za transformaciju sirovih verovatnoća smrti, uz vođenje računa o tome da su izravnate vrednosti što je moguće bliže sirovim verovatnoćama i da kontinuitet izravnatih vrednosti ostane sačuvan. U slučaju Republike Srbije, primenjene su *Karupove formule* različite jačine i *Gompertz-Makeham model* , a za neke verovatnoće uzimaju se vrednosti sirovih verovatnoća smrti ili su fiksirane, računate na osnovu rezultata prethodnih tablica smrtnosti.

Postupak izravnanja primenjen u izradi ovih tablica smrtnosti je sledeći:

Za starosti x = 0, 1, 2 i 3 godine, izravnate vrednosti verovatnoća smrti jednake su sirovim verovatnoćama, tj. $q_x = q'_x$;

Za starosti x = 4, …, 80 godina, izravnate vrednosti verovatnoća smrti jednake smrti dobijene su primenom Karupovih formula, najviše jačine sedam;

U intervalu x = 81 do x = 98 izračunate su verovatnoće q_x na bazi modela eksponencijalne krive i korišćenjem Gomperc-Makehamovih formula;

Izravnate verovatnoće smrti za starost 99 godina, za muški i ženski pol, jesu fiksirane vrednosti dobijene umanjivanjem ovih verovatnoća iz perioda 2001.–2003. godine za srednju vrednost pada tih verovatnoća u periodima od 1970.–1972. do 1980.–1982., od 1980.–1982. do 1990.–1992. i od 1990.–1992. do 2001.–2003. godine. Prosečna vrednost ovih verovatnoća daje izravnatu vrednost verovatnoća smrti za ukupno stanovništvo;

Uzima se da je verovatnoća smrti stogodišnjaka q_{100} = 1.

Opšti oblik Karupovih formula glasi:

$$\boldsymbol{q_{x,n} = \frac{1}{2n^4}\sum_{v=0}^{n-1}(k_v Z_v + k_{n+v} Z_{n+v})} \qquad (9)$$

gde je:

$k_v = 2n^3 - 5nv^2 + 3v^3$
$k_{n+v} = -v\,(n-v)^2$
$z_0 = q'_x$
$z_v = q'_{x-v} + q'_{x+v}$

Indeks n označava jačinu formule.

Upotrebljene su formule najviše jačine sedam. Za svaku starost x izračunate su vrednosti $q_{x,1} - q_{x,7}$ i potom je izabrana ona vrednost $q_{x,k}$ za koju je:

$$L_x q_{x,k} - T_x = min_n(L_x q_{x,n} - T_x)$$

Specijalne formule izvedene iz opšte formule su:

$$q_{x,1} = q'_x$$

$$q_{x,2} = \frac{1}{32}(16q'_x + 9z_1 - z_3)$$

$$q_{x,3} = \frac{1}{162}(54q'_x + 42z_1 + 18z_2 - 4z_4 - 2z_5)$$

$$q_{x,4} = \frac{1}{512}(128q'_x + 111z_1 + 72z_2 + 29z_3 - 9z_5 - 8z_6 - 3z_7)$$

$$q_{x,5} = \frac{1}{1.250}(250q'_x + 228z_1 + 174z_2 + 106z_3 + 42z_4 - 16z_6 - 18z_7 - 12z_8 - 4z_9)$$

$$q_{x,6} = \frac{1}{2.592}(432q'_x + 405z_1 + 336z_2 + 243z_3 + 144z_4 + 57z_5 - 25z_7 - 32z_8 - 27z_9 - 16z_{10} - 5z_{11})$$

$$q_{x,7} = \frac{1}{4.802}(686q'_x + 654z_1 + 570z_2 + 452z_3 + 318z_4 + 186z_5 + 74z_6 - 36z_8 - 50z_9 - 48z_{10} - 36z_{11} - 20z_{12} - 6z_{13})$$

Postupak izravnanja primenjen za starosti više od 80 godina podrazumeva prvo računanje vrednosti verovatnoće doživljenja p_x korišćenjem Gomperz-Makehamove formule:

$$\boldsymbol{\log p_x = a + bc^{x-70}} \qquad (10)$$

Obračun parametara *a*, *b*, *c* oslanja se na tri vrednosti: p_{80}, p_{70} i p_{60}, gde je $p_x=1-q_x$, a q_x izravnata verovatnoća smrti Karupovim formulama. Tako je:

$$c = \frac{(\log p_{80} - \log p_{70})}{(\log p_{70} - \log p_{60})}$$

$$b = \frac{(\log p_{80} - \log p_{70})}{(c^{10} - 1)}$$

$$a = \log p_{70} - b$$

Kada se po formuli (10) izračuna vrednost p_{80}, onda se računa verovatnoća smrti q_{80} po formuli: $q_{80}=1–p_{80}$ i ova vrednost se koristi za dalje računanje verovatnoća smrti.

Konačno, izravnate verovatnoće smrti u intervalu x = 81 do x = 98 rezultat su primene modela eksponencijalne krive oblika:

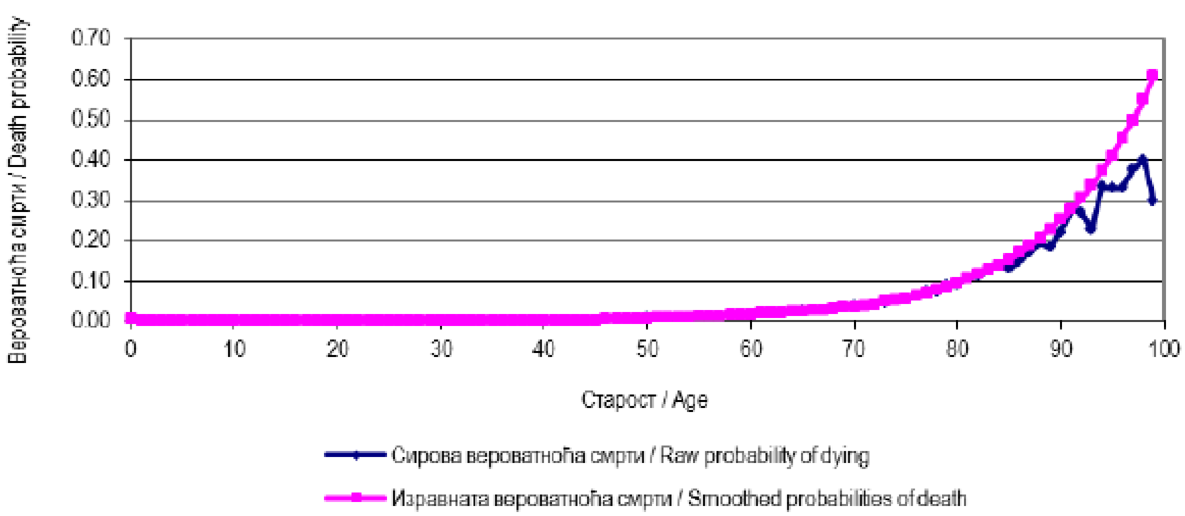
$$q_x = bc^{x-80}$$

pri čemu je

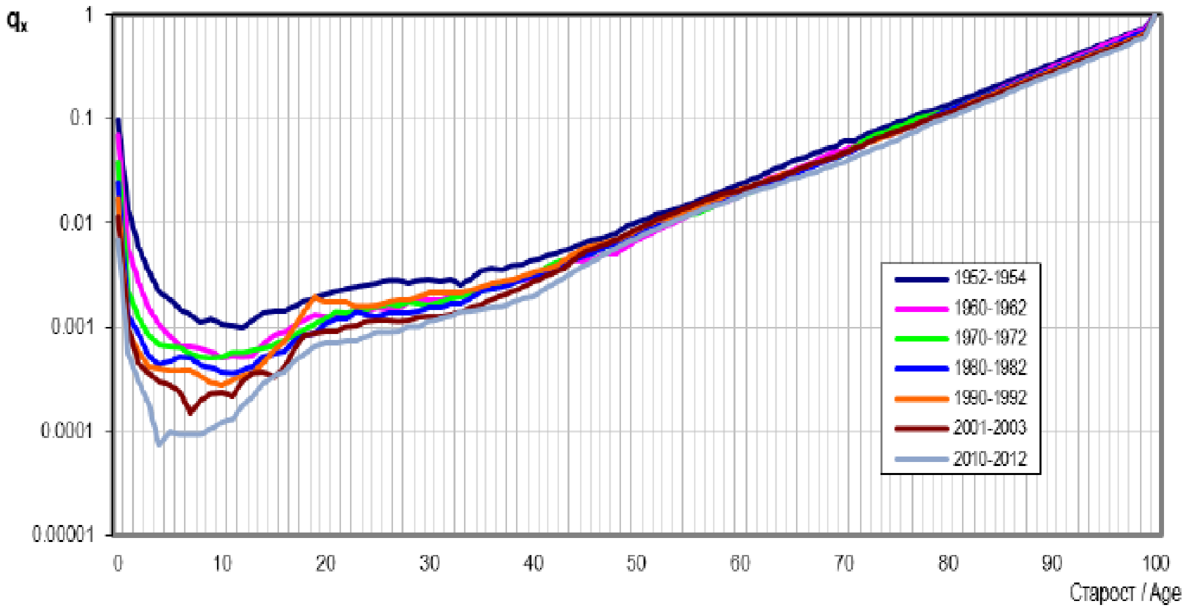
$$b = q_{80}$$

$$c = (q_{99}/q_{80})^{1/19}$$

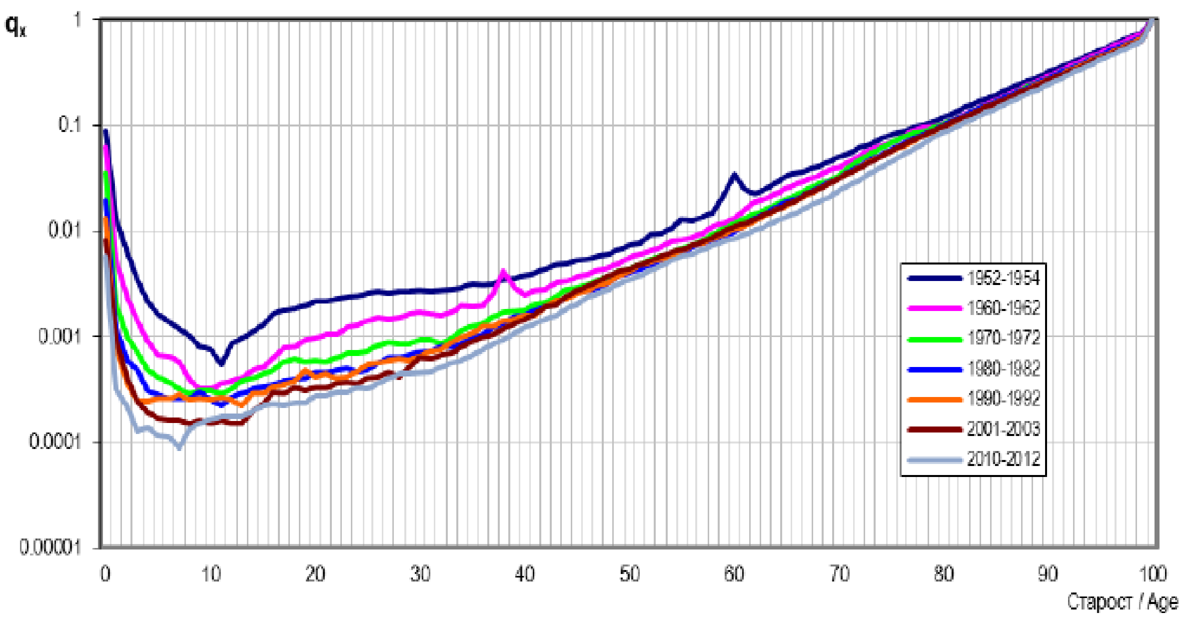
gde je q_{80} vrednost dobijena prethodno opisanim postupkom, vrednost q_{80} pri računanju koeficijenta c je izravnata verovatnoća smrti Karupovim formulama, a q_{99} je fiksirana vrednost.



Slika 6. *Sirove i izravnate verovatnoće smrti, Grad Beograd, muško stanovništvo*



Slika 7. *Izravnate verovatnoće smrti u Republici Srbiji u periodu 1953.–2011., za muško stanovništvo*



Slika 8. *Izravnate verovatnoće smrti u Republici Srbiji u periodu 1953.–2011., za žensko stanovništvo*

3.1.1.6. Izrada ostalih pokazatelja u tablicama smrtnosti

Ostali pokazatelji u tablicama baziraju se na verovatnoćama smrti i u njihovoj izradi upotrebljene su sledeće formule:

Verovatnoća doživljenja (p_x) jeste verovatnoća da će jedno lice staro *x* godina doživeti starost od *x+1* godina:

$$p_x = 1 - q_x$$

Broj živih (l_x) pokazuje kako se jedan zatvoreni skup, čije je početno brojno stanje 100.000 istovremeno živorođenih stanovnika, smanjuje zbog smrtnosti sa povećanjem godina starosti:

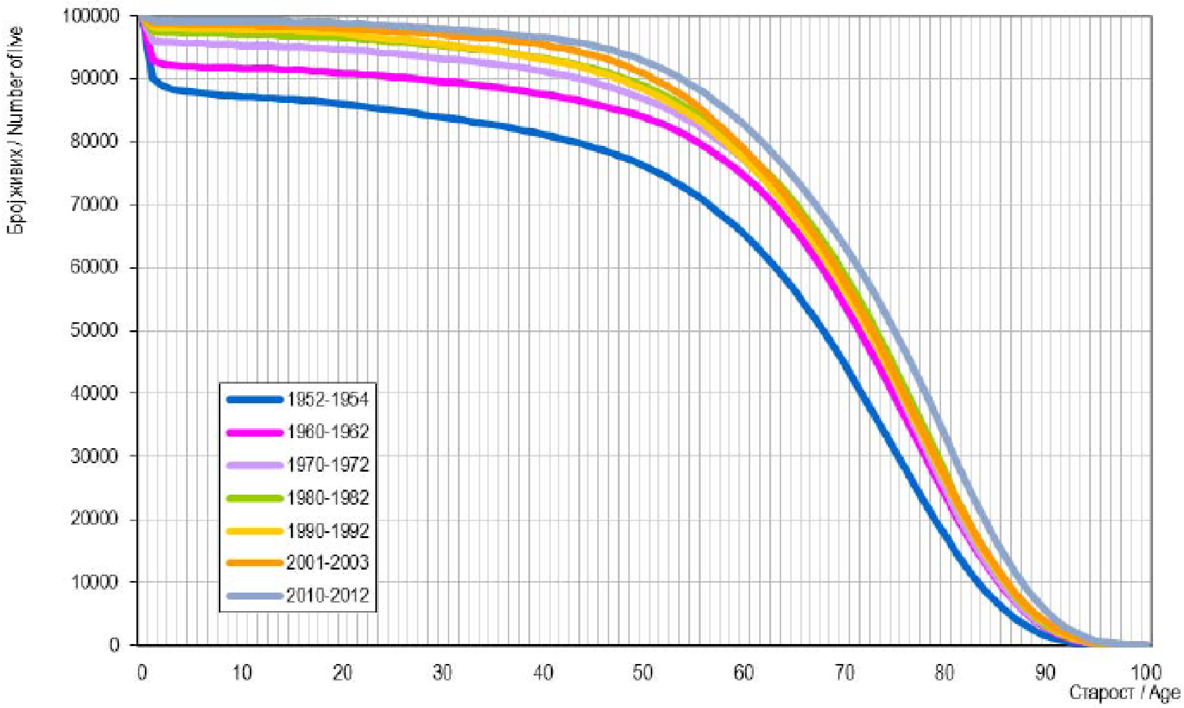
$$l_0 = 100.000, \ \ l_{x+1} = l_x(1 - q_x)$$

Broj živih, prema tablicama smrtnosti 2010.–2012., u odnosu na prethodne tablice, pokazuje porast, što je normalna posledica smanjenja verovatnoće smrti (Tabela 2).

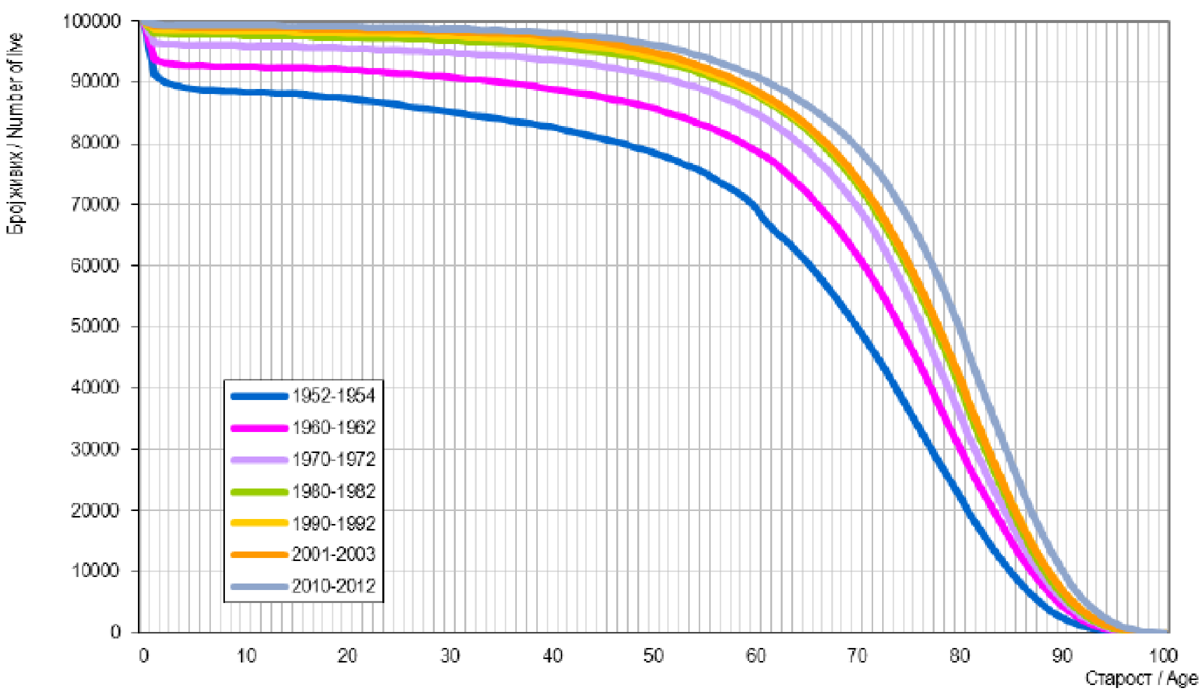
Tabela 2. *Broj živih (l_x) u Republici Srbiji*

Период таблица	Пол	Старост / Age								Sex	*Period of tables*
		5	10	20	30	40	50	60	70		
1990–1992	Мушки Женски	98064 98506	97890 98377	97160 98071	95486 97577	93158 96563	88322 94170	77229 88291	56382 73966	Male Female	1990–1992
2001–2003	Мушки Женски	98632 99012	98523 98932	98076 98708	97013 98318	95393 97451	90768 94905	78805 88757	57578 74172	Male Female	2001–2003
2010–2012	Мушки Женски	99192 99351	99144 99292	98814 99091	97980 98751	96556 98073	92849 96095	82640 90940	63417 79260	Male Female	2010–2012

Posmatrano u celosti, broj živih muškaraca po svim starostima manji je od broja živih žena. Takođe, vrednosti broja živih rastu za oba pola i u svim starostima. Međutim, u svim starostima, porast broja živih muškaraca je veći nego porast broja živih žena. Pri tom je najmanji rast broja živih u 2002., u odnosu na vrednosti 1991., zabeležen kod žena starih 70 godina, a najveći kod muškaraca, iste starosti, u 2011. u odnosu na 2002.



Slika 9. *Broj živih muškaraca u Republici Srbiji u periodu 1953.–2011. godine*



Slika 10. *Broj živih žena u Republici Srbiji u periodu 1953.–2011. godine*

Broj mrtvih (d_x) pokazuje koliko lica od broja živih (l_x) u određenoj starosti x prema izravnatoj verovatnoći smrti (q_x) umre pre nego dostigne starost od $x+1$ godina:

$$d_x = l_x - l_{x+1} = l_x q_x$$

Zbir brojeva živih (N_x) jeste broj koji služi za izračunavanje srednjeg trajanja života (e_x^0), a znači fiktivne zbirove lica koja su od skupine od 100.000 istovremeno živorođenih preživela nultu godinu, zatim onih koja su od ovih preživela prvu, drugu itd. do stote godine.

Tehnički se ovaj broj dobija kumuliranjem vrednosti (l_x), počevši od stote godine:

$$N_x = \sum_{x}^{100} l_x$$

Srednje trajanje života (e_x^0) pokazuje očekivano trajanje života jednog lica starog x godina pod uslovima smrtnosti po starosti iz perioda na koji se odnose tablice:

$$e_{100}^0 = 0{,}5$$

$$e_x^0 = 0{,}5 + (1 - q_x)(e_{x+1}^0 + 0{,}5)$$

Numeričke vrednosti navedenih biometrijskih funkcija prikazane su u odgovarajućim kolonama u tabelarnom delu ovih tablica.

U periodu od 1952.–1954. do 2010.–2012. godine stanovništvo Republike Srbije doživelo je značajne promene u pogledu smrtnosti stanovništva, što se može sagledati iz podataka o srednjem trajanju života novorođenih, prikazanih u Tabeli 3. Najveći porast dužine trajanja života muškaraca i žena u Srbiji zabeležen je u periodu između popisa 1953. i 1961. godine, kada je vrednost očekivanog trajanja života porasla za 5,73 godina za muškarce, odnosno 6,12 za žene. U narednom međupopisnom periodu, 1961.–1971., nastavlja se trend rasta, ali su uočljive razlike po polu – vrednost očekivanog trajanja života kod žena je veća za 4,27, dok je kod muškaraca porast nešto manji (2,58). Najmanji porast (od 0,77) za žene zabeležen je u periodu 1981.–1991., kada se prvi put dešava da je u desetogodišnjem periodu vrednost očekivanog trajanja života za muškarce opala za 0,32 godine.

Tabela 3. *Srednje trajanje života novorođenih (e_x^0) u Republici Srbiji*

	Период таблица	Пол / Sex		Period of tables	
		мушки / *Male*	женски / *Female*		
Средње трајање живота новорођених	1952–1954	58,81	61,13	1952–1954	Mean life expectancy of life births
	1960–1962	64,54	67,25	1960–1962	
	1970–1972	67,12	71,52	1970–1972	
	1980–1982	68,77	73,74	1980–1982	
	1990–1992	68,45	74,51	1990–1992	
	2001–2003	69,60	74,95	2001–2003	
	2010–2012	71,96	77,12	2010–2012	
Повећање у годинама	Од 1952–1954. до 1960–1962.	5,73	6,12	From 1952–1954 to 1960–1962	Increase in years
	Од 1960–1962. до 1970–1972.	2,58	4,27	From 1960–1962 to 1970–1972	
	Од 1970–1972. до 1980–1982.	1,65	2,22	From 1970–1972 to 1980–1982	
	Од 1980–1982. до 1990–1992.	-0,32	0,77	From 1980–1982 to 1990–1992	
	Од 1990–1992. до 2001–2003.	1,15	0,44	From 1990–1992 to 2001–2003	
	Од 2001–2003. до 2010–2012.	2,36	2,17	From 2001–2003 to 2010–2012	
Индекс	1961/1953	109,7	110,0	1961/1953	Index
	1971/1961	104,0	106,3	1971/1961	
	1981/1971	102,5	103,1	1981/1971	
	1991/1981	99,5	101,0	1991/1981	
	2002/1991	101,7	100,6	2002/1991	
	2011/2002	103,4	102,9	2011/2002	
Годишња стопа раста (%)	Од 1952–1954. до 1960–1962.	1,16	1,19	From 1952–1954 to 1960–1962	Annual growth rate (%)
	Од 1960–1962. до 1970–1972.	0,39	0,62	From 1960–1962 to 1970–1972	
	Од 1970–1972. до 1980–1982.	0,24	0,31	From 1970–1972 to 1980–1982	
	Од 1980–1982. до 1990–1992.	-0,05	0,10	From 1980–1982 to 1990–1992	
	Од 1990–1992. до 2001–2003.	0,00	0,00	From 1990–1992 to 2001–2003	
	Од 2001–2003. до 2010–2012.	0,37	0,32	From 2001–2003 to 2010–2012	

Izračunate vrednosti očekivanog trajanja života u tablicama za period 2001.–2003. za Republiku Srbiju jesu 69,60 godina za muškarce i 74,95 godina za žene, što je respektivno za 1,15, odnosno 0,44 godina više u odnosu na prethodne tablice. U ovim tablicama smrtnosti rezultati očekivanog trajanja života pokazuju gotovo ujednačen porast za oba pola za oko dve godine, dostižući vrednost od 71,96 godine za muškarce i 77,12 za žene.

U Tabeli 4 dati su uporedni podaci o srednjem trajanju života za izvesne godine starosti u periodu od 1952.–1954. do 2010.–2012. godine. Prema rezultatima poslednjih tablica smrtnosti, može se zaključiti da je srednje trajanje života stanovništva Republike Srbije u porastu u odnosu na sve ranije posmatrane periode. Ovaj porast je karakterističan za sve starosti i oba pola. I dalje je veći porast srednjeg trajanja života živorođene dece od porasta srednjeg trajanja života sredovečnog, a posebno starog stanovništva.

Tabela 4. *Srednje trajanje života novorođenih (e_x^0) prema polu i pojedinim godinama starosti*

Године старости	Пол	Период таблица / *Period of tables*							Sex	Age
		1952–1954	1960–1962	1970–1972	1980–1982	1990–1992	2001–2003	2010–2012		
0	Мушки	58,81	64,54	67,12	68,77	68,45	69,60	71,96	Male	0
	Женски	61,13	67,25	71,52	73,74	74,51	74,95	77,12	Female	
5	Мушки	61,83	65,11	65,14	65,68	64,79	65,55	67,54	Male	5
	Женски	63,63	67,43	69,40	70,44	70,63	70,69	72,62	Female	
10	Мушки	57,25	60,32	60,32	60,83	59,90	60,62	62,57	Male	10
	Женски	59,00	62,60	64,51	65,64	65,72	65,75	67,66	Female	
20	Мушки	47,97	50,76	50,72	51,14	50,29	50,87	52,76	Male	20
	Женски	49,68	52,92	54,77	55,73	55,90	55,88	57,79	Female	
30	Мушки	39,06	41,45	41,42	41,74	41,09	41,37	43,17	Male	30
	Женски	40,78	43,54	45,14	46,00	46,16	46,08	47,97	Female	
40	Мушки	30,18	32,27	32,22	32,50	31,98	31,98	33,72	Male	40
	Женски	31,87	34,38	35,63	36,40	36,58	36,44	38,26	Female	
50	Мушки	21,81	23,46	23,57	23,83	23,42	23,30	24,83	Male	50
	Женски	23,26	25,44	26,49	27,18	27,37	27,26	28,93	Female	
60	Мушки	14,51	15,64	15,84	16,20	15,97	15,99	17,20	Male	60
	Женски	15,49	17,15	17,96	18,56	18,81	18,76	20,24	Female	
70	Мушки	8,74	9,51	9,46	9,82	9,87	9,87	10,77	Male	70
	Женски	9,54	10,37	10,67	11,12	11,34	11,32	12,38	Female	

U PRILOGU 2, 3 i 4 date su detaljne tablice smrtnosti za period 2010.–2012. za Republiku Srbiju i to za ukupno stanovništvo i ponaosob, za muško i za žensko stanovništvo, respektivno.

3.2. Verovatnoća života i smrti jednog lica

Osnovu aktuarske matematike čine finansijska matematika i tablice smrtnosti. U zaglavlju tablica smrtnosti nalaze se sledeće oznake:

- $\boldsymbol{x}$ – broj godina starosti posmatranih lica (od 10 do 99 godina)
- $\boldsymbol{l_x}$ – broj živih lica starih x godina u posmatranoj populaciji
- $\boldsymbol{d_x}$ – broj umrlih lica koji su doživeli x godina, a nisu doživeli $(x+1)$ godina (broj umrlih u toku $(x+1)$-*te* godine)

Neka su l_x, l_{x+1}, l_{x+2}, ... , l_{x+n} oznake za broj živih lica starih x, $x+1$, $x+2$, ..., $x+n$ godina. Prirodna je činjenica, što se može videti i iz Tablica smrtnosti, da važi:

$$l_x > l_{x+1} > l_{x+2} > ... > l_{x+n}$$

Ako je d_x oznaka za broj lica koja umru u toku $(x+1)$-*te* godine, tj. između punih x i $(x+1)$ godina, onda je:

$$\boldsymbol{d_x = l_x - l_{x+1}}$$

Prema tome, **verovatnoća da će lice staro x godina doživeti $(x+1)$ godina, odnosno da će od l_x živih lica ostati l_{x+1} živih lica, je:**

$$\boldsymbol{p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}} \qquad (11)$$

PRIMER 1:

Kolika je verovatnoća da će lice staro 60 godina doživeti 80 godina starosti?

Iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava, koja se nalazi u PRILOGU 1, očitavaju se vrednosti za l_{80} i l_{60}, koje se zatim zamenjuju u formuli (11) i na taj način izračunava verovatnoća da će lice staro 60 godina doživeti 80 godina:

$$p_{60} = \frac{l_{80}}{l_{60}} = \frac{13.290}{55.973} = 0{,}2374 \quad \rightarrow \quad 23{,}74\%$$

Verovatnoća da će lice staro x godina doživeti $(x+n)$ godina, odnosno da će živeti još tačno n godina, je:

$$\boldsymbol{{}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}} \qquad (12)$$

PRIMER 2:

Kolika je verovatnoća da će lice staro 60 godina živeti još tačno 20 godina?

Iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava, koja se nalazi u PRILOGU 1, očitavaju se vrednosti za l_{80} i l_{60}, koje se zatim zamenjuju u formuli (12) i na taj način izračunava verovatnoća da će lice staro 60 godina doživeti 80 godina, odnosno živeti još tačno 20 godina:

$$_{20}p_{60} = \frac{l_{60+20}}{l_{60}} = \frac{l_{80}}{l_{60}} = \frac{13.290}{55.973} = 0{,}2374 \quad \rightarrow \quad 23{,}74\%$$

Verovatnoća da lice staro *x* godina neće doživeti *(x+1)* godina, odnosno da će umreti u toku *(x+1)-te* godine, je:

$$\boldsymbol{q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}} \qquad (13)$$

odnosno,

verovatnoća da lice staro *x* godina doživi smrt za tačno *n* godina, tj. da neće doživeti *(x+n)-tu* godinu, je:

$$\boldsymbol{{}_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}} \qquad (14)$$

ili

$$\boldsymbol{{}_nq_x = 1 - {}_np_x} \qquad (15)$$

PRIMER 3:

Kolika je verovatnoća da lice staro 60 godina doživi smrt za tačno 20 godina?

Iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava očitavaju se vrednosti za l_{60} i l_{80}, koje se zatim zamenjuju u formuli (14) i na taj način izračunava verovatnoća da će lice staro 60 godina doživeti smrt za tačno 20 godina:

$$ {}_{20}q_{60} = \frac{l_{60} - l_{60+20}}{l_{60}} = \frac{l_{60} - l_{80}}{l_{60}} = \frac{55.973 - 13.290}{55.973} = 0{,}7626 \quad \rightarrow \quad 76{,}26\% $$

ili primenom formule (15):

$$ {}_{20}q_{60} = 1 - {}_{20}p_{60} = 1 - 0{,}2374 = 0{,}7626 \quad \rightarrow \quad 76{,}26\% $$

PRIMER 4:

Kolika je verovatnoća da će lice staro 40 godina:

a) *doživeti 50 godina života,*
b) *umreti pre nego što navrši 50 godina starosti?*

a) Iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava očitavaju se vrednosti za l_{50} i l_{40}, koje se zatim zamenjuju u formuli (12) i na taj način izračunava verovatnoća da će lice staro 40 godina doživeti 50 godina:

$$ {}_{10}p_{40} = \frac{l_{40+10}}{l_{40}} = \frac{l_{50}}{l_{40}} = \frac{69.517}{78.653} = 0{,}8838 \quad \rightarrow \quad 88{,}38\% $$

b) Dobijena vrednost za ${}_{10}p_{40}$ =0,8838 zamenjuje se u formuli (15) i na taj način izračunava verovatnoća da će lice staro 40 godina doživeti smrt pre nego navrši 50 godina:

$$ {}_{10}q_{40} = 1 - {}_{10}p_{40} = 1 - 0{,}8838 = 0{,}1162 \quad \rightarrow \quad 11{,}62\% $$

PRIMER 5:

Kolika je verovatnoća da će lice staro 50 godina doživeti 70 godina starosti, a kolika da neće doživeti?

Iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava očitavaju se vrednosti za l_{70} i l_{50}, koje se zatim zamenjuju u formuli (12) i na taj način izračunava verovatnoća da će lice staro 50 godina doživeti 70 godina:

$$_{20}p_{50} = \frac{l_{50+20}}{l_{50}} = \frac{l_{70}}{l_{50}} = \frac{35.837}{69.517} = 0{,}5155 \;\; \rightarrow \;\; 51.55\%$$

Zatim se dobijena vrednost za $_{20}p_{50}$ =0,5155 zamenjuje u formuli (15) i na taj način izračunava verovatnoća da lice staro 50 godina neće doživeti 70 godina starosti:

$$_{20}q_{50} = 1 - {}_{20}p_{50} = 1 - 0{,}5155 = 0{,}4845 \;\; \rightarrow \;\; 48{,}45\%$$

PRIMER 6:

U učionici ima 5 studenata starih 17 godina, 10 studenata starih 18 godina, 12 studenata starih 19 godina i 8 studenata starih 20 godina. Koliko će studenata verovatno živeti posle 40 godina?

Iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava očitavaju se sve tražene vrednosti l_x:

$$p = 5\frac{l_{57}}{l_{17}} + 10\frac{l_{58}}{l_{18}} + 12\frac{l_{59}}{l_{19}} + 8\frac{l_{60}}{l_{20}} = 5\frac{60.658}{95.293} + 10\frac{59.161}{94.620} + 12\frac{57.600}{93.945} + 8\frac{55.973}{93.268} = 22$$

Na osnovu dobijene vrednosti može se zaključiti da će nakon 40 godina biti verovatno u životu još 22 od 35 studenata.

Verovatnoća da će lice staro *x* godina živeti još tačno *m* godina, a onda umreti u narednih *n* godina je:

$$ {}_{m|n}q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} \qquad (16) $$

<u>PRIMER 7</u>:

Kolika je verovatnoća da će lice staro 40 godina živeti još 10 godina, a onda umreti za tačno 10 godina?

Iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava očitavaju se vrednosti za l_{50} i l_{60}, a zatim zamenjuju u formuli (16):

$$ {}_{10|10}q_{40} = \frac{l_{40+10} - l_{40+10+10}}{l_{40}} = \frac{l_{50} - l_{60}}{l_{40}} = \frac{69.517 - 55.973}{78.653} = 0{,}1722 \quad \rightarrow \quad 17{,}22\% $$

3.3. Verovatno trajanje života

Koliko će još verovatno godina živeti lice staro *x* godina?

Pretpostavka je da će živeti verovatno još *n* godina.

Tada je logično da se pretpostavi da je njih polovina doživelo starost od *(x+n)* godina.

Polazeći od toga da, od l_x živih lica, kroz *n* godina ostane u životu l_{x+n} lica, onda je:

$$ l_{x+n} = \frac{l_x}{2} \qquad (17) $$

PRIMER 8:

Koliko će još verovatno živeti lice staro 50 godina?

Vrednost za l_{50} očitava se iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava, a zatim zamenjuje u formuli (17):

$$l_{50+n} = \frac{l_{50}}{2} = \frac{69.517}{2} = 34.758,5$$

Izračunati broj živih lica leži između dve vrednosti u Tablici smrtnosti: l_{70} = 35.837 i l_{71} = 33.510. Prema tome, sledi da je:

$l_{71} < 34.758,5 < l_{70}$

odnosno,

$l_{71} < l_{50+n} < l_{70}$

što znači,

$70 < 50+n < 71$ i $20 < n < 21$

Na osnovu toga, može se reći da će posmatrano lice živeti još verovatno između 20 i 21 godine.

PRIMER 9:

Koliko je verovatno trajanje živeta osobe stare 28 godina?

Vrednost za l_{28} očitava se iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava, a zatim zamenjuje u formuli (17):

$$l_{28+n} = \frac{l_{28}}{2} = \frac{87.726}{2} = 43.863$$

Izračunati broj živih lica leži između dve vrednosti u Tablici smrtnosti: l_{66} = 44.693i l_{67} = 42.565.

Prema tome, sledi da je:

$l_{67} < 34.758{,}5 < l_{66}$

odnosno,

$l_{67} < l_{50+n} < l_{66}$

što znači,

$66 < 28+n < 67$ i $38 < n < 39$

Na osnovu toga, može se reći da će posmatrano lice živeti još verovatno između 38 i 39 godina.

4. UTVRĐIVANJE (OBRAČUN) TARIFA (NETO PREMIJE) U ŽIVOTNOM OSIGURANJU

4.1. Komutativni brojevi

Tablice smrtnosti sadrže vrednosti za l_x (broj živih lica starih x godina) počev od nekog broja x, pa do najvećeg broja w. Tako na primer, tablica smrtnosti 17 engleskih društava $HM^{4\%}$ počinje sa $x = 0$, a završava se sa $w = 99$.

U tablicama smrtnosti, uz vrednosti l_x navedene su i neke druge vrednosti koje su u vezi sa l_x, a koje se koriste za izračunavanja u aktuarskoj matematici:

- x – broj godina
- d_x – broj umrlih lica u toku *(x+1)-te* godine

Broj umrlih lica starosti x predstavlja ona lica koja su doživela starost x, ali nisu doživela starost $(x+1)$, pa je jednak razlici broja lica starosti x godina i broja lica starosti $(x+1)$ godina:

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

Upotrebom ovih osnovnih vrednosti i obračunske kamatne stope p koja se primenjuje u osiguravajućim kompanijama, izračunavaju se izvedeni brojevi pod nazivom ***komutativni brojevi*** ili simboli, koji zamenjuju složene izraze. Njihova vrednost je unapred izračunata i data u tablici smrtnosti, pa ih ne treba svaki put izračunavati.

4.1.1. Komutativni brojevi za živa lica

$\boldsymbol{D_x}$ – broj diskontovanih živih lica starih x godina

$$\boldsymbol{D_x} = \frac{\boldsymbol{l_x}}{\boldsymbol{r^x}} = \frac{\boldsymbol{l_x}}{(\boldsymbol{1+p})^{x}} \qquad (18)$$

$\boldsymbol{N_x}$ – zbir brojeva diskontovanih živih lica počev od starosti x do najdublje starosti w

$$\boldsymbol{N_x} = \boldsymbol{D_x} + \boldsymbol{D_{x+1}} + \boldsymbol{D_{x+2}} + \cdots + \boldsymbol{D_w} \qquad (19)$$

$\boldsymbol{S_x}$ – zbir zbirova diskontovanih živih lica počev od starosti x do najdublje starosti w koju doživi u tablici posmatrana grupa

$$\boldsymbol{S_x} = \boldsymbol{N_x} + \boldsymbol{N_{x+1}} + \boldsymbol{N_{x+2}} + \cdots + \boldsymbol{N_w} \qquad (20)$$

4.1.2. Komutativni brojevi za umrla lica

$\boldsymbol{C_x}$ – broj diskontovanih umrlih lica u toku *(x+1)-te* godine

$$C_x = \frac{d_x}{r^{x+1}} = \frac{d_x}{(1+p)^{x+1}} \quad (21)$$

$\boldsymbol{M_x}$ – zbir brojeva diskontovanih umrlih lica počev od onih koja su umrla u toku *(x+1)-te* godine

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{w-1} \quad (22)$$

$\boldsymbol{R_x}$ – zbir zbirova diskontovanih umrlih lica počev počev od onih koja su umrla u toku *(x+1)-te* godine

$$R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \cdots + M_{w-1} \quad (23)$$

4.2. Neto premija u životnom osiguranju

Premija predstavlja cenu osiguranja, odnosno iznos koji osiguranik uplaćuje osiguravaču po osnovu ugovora o osiguranju.

Premija može biti:

- **jednokratna (MIZA)** – osiguranik je uplaćuje odjednom
- **višekratna (PERIODIČNA PREMIJA)** – osiguranik vrši plaćanje u ratama.

Periodična premija može biti:

- ***doživotna*** – osiguranik je uplaćuje do kraja života
- ***privremena*** – osiguranik je uplaćuje određeni vremenski period, kako je utvrđeno u ugovoru.

Razlikujemo čistu (neto) premiju ili komercijalnu (bruto) premiju.

Čista premija je cena koja treba biti isplaćena osiguraniku od strane osiguravača po obavezama koje proizilaze iz ugovora o osiguranju.

Za pokriće svih troškova osiguranja i određene dobiti, potrebno je ovu čistu premiju povećati za navedene troškove i na taj način se dolazi do ***bruto premije*** koju osiguranik uplaćuje osiguravaču.

4.3. Predmet životnog osiguranja

Predmet životnog osiguranja mogu biti: lična renta i kapital.

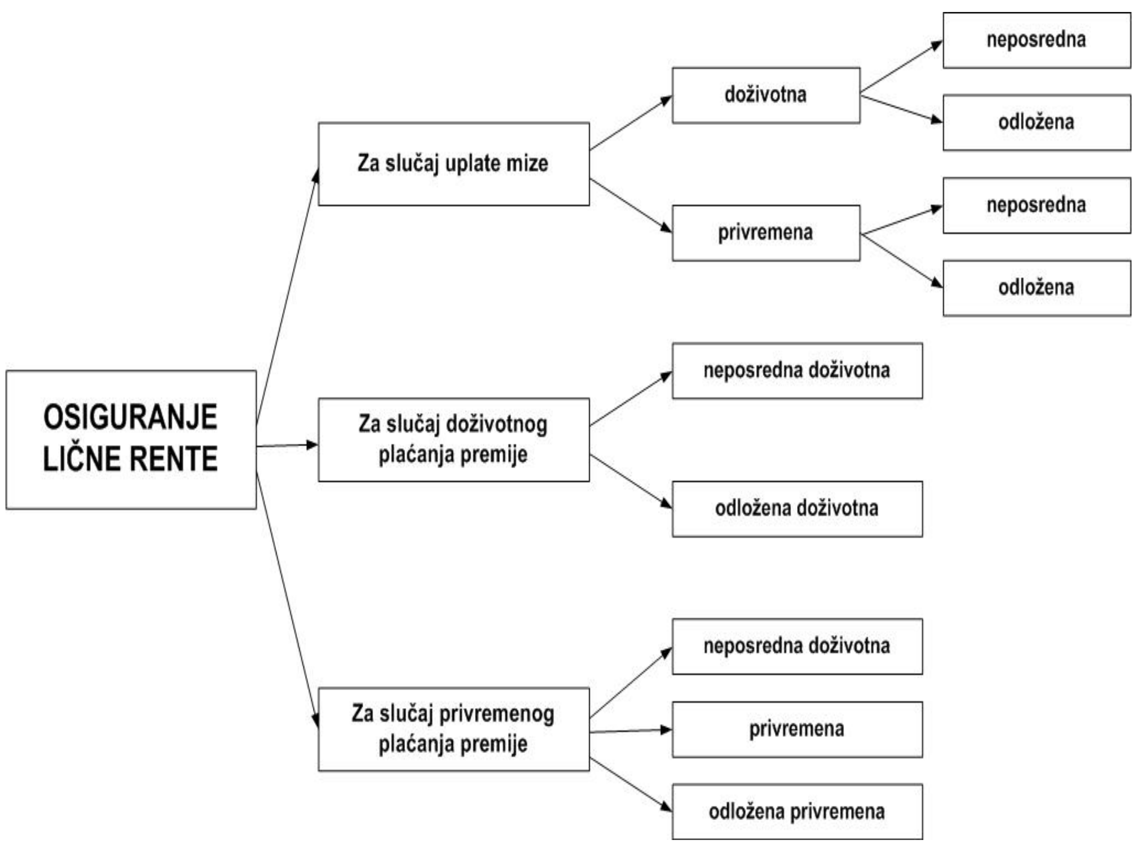
Lična renta je renta koju osiguranik prima lično u vidu višekratnih iznosa. Osiguranik može da uplati osiguravajućoj kompaniji ili jednokratnu premiju (mizu) ili da vrši plaćanje u ratama (periodična premija), kako bi na osnovu toga obezbedio primanje rente do kraja života ili za neki određeni vremenski period. Postoji i renta nadživljenja ili renta u korist trećeg lica, kojom osiguranik želi da, u slučaju svoje smrti, obezbedi članove porodice.

Prema trajanju, renta može biti ***doživotna*** (ako se isplaćuje osiguraniku do kraja života) ili ***privremena*** (ako se isplaćuje osiguraniku samo određeni vremenski period).

Prema početku primanja, renta može biti neposredna i odložena. ***Neposredna renta*** počinje da teče odmah po zaključenju osiguranja, a ako od dana zaključenja osiguranja do početka primanja rente protekne određeni vremenski period, onda je to ***odložena renta***.

Prema načinu primanja, renta može biti ***anticipativna*** (prima se početkom obračunskog perioda – godine) i ***dekurzivna*** (prima se krajem obračunskog perioda – godine).

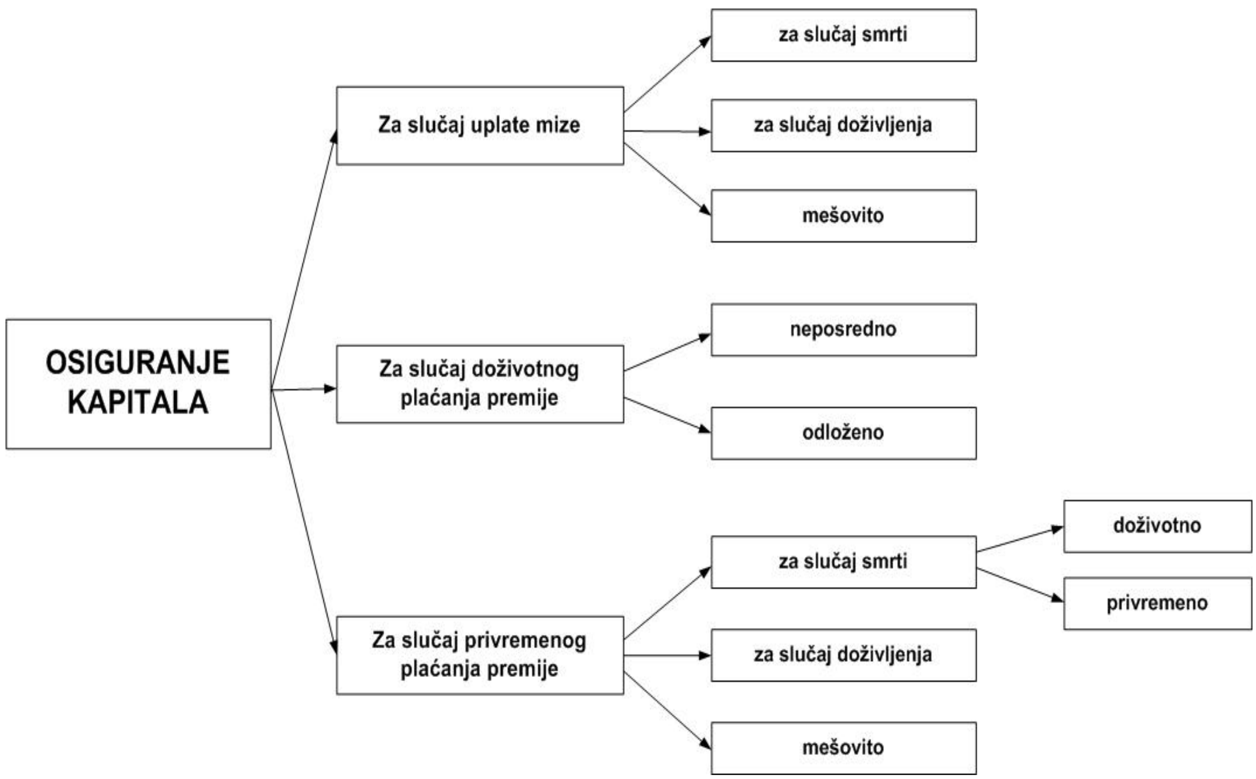
Vrste osiguranja za slučaj osiguranja rente prikazane su na Slici 11.



Slika 11. *Vrste osiguranja lične rente*

<u>Osiguranje kapitala</u> je vrsta osiguranja, gde osiguranik može da uplati osiguravajućoj kompaniji ili jednokratnu premiju (mizu) ili da vrši plaćanje u ratama (periodična premija), kako bi na osnovu toga obezbedio da, nakon određenog vremenskog perioda, osiguraniku ili njegovim naslednicima bude isplaćen ugovoreni iznos (kapital) <u>odjednom</u>.

Vrste osiguranja za slučaj osiguranja kapitala prikazane su na Slici 12.



Slika 12. *Vrste osiguranja kapitala*

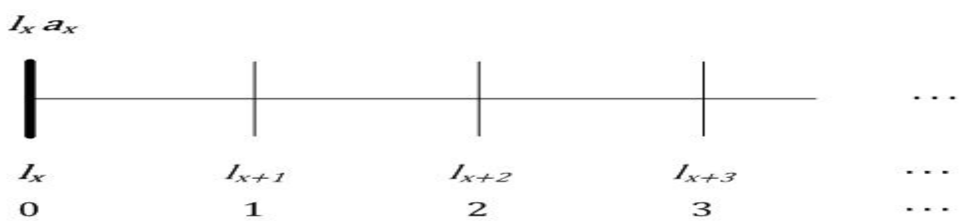
4.4. Osiguranje lične rente (R) uplatom mize (jednokratne premije)

4.4.1. *Neposredna doživotna lična renta*

Neposredna doživotna lična renta je renta koju osiguranik prima svake godine, od dana zaključenja ugovora o osiguranju (*neposredno*) dokle god je živ (*doživotno*), zato što je izvršio jednokratnu uplatu mize (M).

Pretpostavimo da se u nekom osiguravajućem društvu pojavilo l_x živih lica starih x godina, koji su odlučili da se osiguraju na ovaj način. U tom trenutku, svako od tih l_x živih lica mora da uplati premiju $\boldsymbol{a_x}$ (***neto mizu***), kako bi dobijali na početku svake godine po 1 dinar sve do kraja života.

Zbir svih uplata osiguranika, sa jedne strane, mora biti jednak zbiru svih isplata osiguravajuće kompanije (osiguravača), sa druge strane, naravno sve u istom vremenskom trenutku, tj. sve uplate i isplate se moraju diskontovati na isti vremenski trenutak (trenutak 0 na vremenskoj osi).



Trenutak 0 na vremenskoj osi je trenutak kada je svako do l_x živih lica uplatilo osiguravaču po a_x dinara i kada je istovremeno svako od tih lica dobilo po 1 dinar rente, odnosno osiguravač isplatio ukupno l_x dinara. Dalje, redom sa 1, 2, 3, ... označićemo trenutke na vremenskoj osi nakon prve, druge, treće, ... godine, kada je osiguravač preživelim osiguranicima isplaćivao po 1 dinar rente, redom ukupno l_{x+1}, l_{x+2}, l_{x+3}, ...

Iznad vremenske ose, nalaze se sve uplate osiguranika, a ispod vremenske ose, upisuju se sve vrednosti koje osiguravajuća kompanija isplaćuje preživelim osiguranicima. Sve isplate i uplate će biti diskontovane na vremenski trenutak 0, odnosno zbir svih isplata osiguravajuće kompanije i zbir svih uplata od strane osiguranika se mora izjednačiti.

Na ovaj način, dobija se sledeća jednakost:

$$l_x \cdot a_x = l_x + \frac{l_{x+1}}{r} + \frac{l_{x+2}}{r} + \frac{l_{x+3}}{r} + \cdots$$

Odavde se dobija neto miza a_x za 1 dinar rente, a za *R* dinara rente neto miza je:

$$\boldsymbol{M = R \cdot a_x} \qquad (24)$$

Miza (M) za *anticipativnu* neposrednu doživotnu ličnu rentu (R) iznosi:

$$\boldsymbol{M = R \cdot \frac{N_x}{D_x}} \qquad (25)$$

Miza (M) za *dekurzivnu* neposrednu doživotnu ličnu rentu (R) iznosi:

$$\boldsymbol{M = R \cdot \frac{N_{x+1}}{D_x}} \qquad (26)$$

PRIMER 10:

Osoba od 40 godina se osigurala da doživotno prima svake godine rentu R = 5.000 €, koju će primati od trenutka osiguranja, pa sve do kraja života.

Kolika miza je uplaćena za ovo osiguranje, ako je renta:

a) anticipativna

b) dekurzivna ?

a) Iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava očitavaju se vrednosti komutativnih brojeva za živa lica N_{40} i D_{40}, koje se zatim zamenjuju u formuli (25):

$$M = 5.000 \cdot \frac{N_{40}}{D_{40}} = 5.000 \cdot \frac{263.643,62}{16.382,56} = 80.464,72 \text{ €}$$

b) a zatim se očitava i vrednost za N_{41} i primenjuje u formuli (26):

$$M = 5.000 \cdot \frac{N_{40+1}}{D_{40}} = 5.000 \cdot \frac{N_{41}}{D_{40}} = 5.000 \cdot \frac{247.261,06}{16.382,56} = 75.464,72 \text{ €}$$

PRIMER 11:

Lice staro 35 godina osiguralo je rentu od 100.000 dinara koju će da prima od dana osiguranja dokle god je živo.

Koliku će mizu uplatiti za ovo osiguranje ako je renta:

a) *anticipativna*
b) *dekurzivna ?*

a) Iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava očitavaju se vrednosti komutativnih brojeva za živa lica N_{35} i D_{35}, koje se zatim zamenjuju u formuli (25):

$$M = 100.000 \cdot \frac{N_{35}}{D_{35}} = 100.000 \cdot \frac{358.785,45}{20.927,30} = 1.714.437 \; din.$$

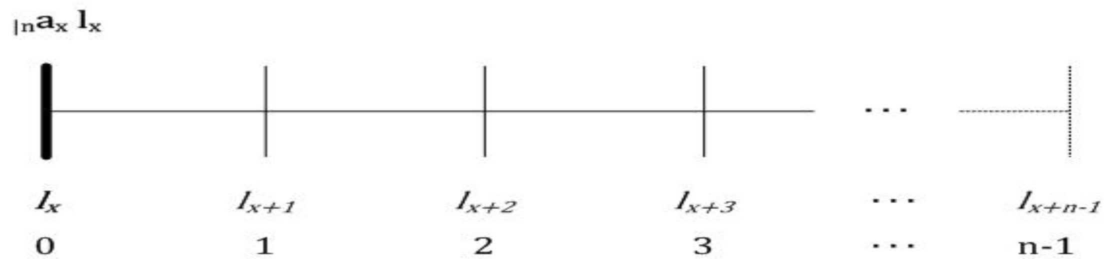
b) a zatim se očitava i vrednost za N_{36} i primenjuje u formuli (26):

$$M = 100.000 \cdot \frac{N_{35+1}}{D_{35}} = 100.000 \cdot \frac{N_{36}}{D_{35}} = 100.000 \cdot \frac{337.858,15}{20.927,30} = 1.616.437,36 \; din.$$

4.4.2. *Neposredna privremena lična renta*

Neposredna privremena lična renta je renta koju osiguranik prima svake godine, od dana zaključenja ugovora o osiguranju (*neposredno*), ali tačno *n* godina (*privremeno*) ili manje od *n* godina, ukoliko je pre toga preminuo, zato što je izvršio jednokratnu uplatu mize (M).

Vremenska osa za obračun ovakve rente je:



odakle diskontovanjem na isti vremenski trenutak (trenutak 0) dolazi do izjednačavanja zbira svih isplata osiguravajuće kompanije i zbira svih uplata od strane osiguranika. Na ovaj način, dobija se sledeća jednakost:

$$l_x \cdot {}_{|n}a_x = l_x + \frac{l_{x+1}}{r} + \frac{l_{x+2}}{r^2} + \frac{l_{x+3}}{r^3} + \cdots + \frac{l_{x+n-1}}{r^{n-1}}$$

Miza (M) za *anticipativnu* neposrednu privremenu ličnu rentu (R) iznosi:

$$\boldsymbol{M = R \cdot {}_{|n}a_x = R \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}} \qquad (27)$$

Miza (M) za *dekurzivnu* neposrednu privremenu ličnu rentu (R) iznosi:

$$\boldsymbol{M = R \cdot {}_{|n}a_x = R \cdot \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}} \qquad (28)$$

PRIMER 12:

Osoba od 45 godina se osigurala da prima svake godine rentu od R=5.000 € od trenutka osiguranja, ali najviše 10 godina ili manje od 10 godina ukoliko premine pre isteka tih 10 godina.

Kolika neto miza je uplaćena za ovo osiguranje ako je renta:

a) *anticipativna*
b) *dekurzivna ?*

a) Iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava očitavaju se vrednosti komutativnih brojeva za živa lica N_{45}, N_{55} i D_{35}, koje se zatim zamenjuju u formuli (27):

$$M = 5.000 \cdot \frac{N_{45} - N_{45+10}}{D_{45}} = 5.000 \cdot \frac{N_{45} - N_{55}}{D_{45}} = 5.000 \cdot \frac{189.326{,}69 - 87.924{,}184}{12.743{,}15} = \\ = 39.787{,}06 \text{ €}$$

b) a zatim se očitavaju i vrednosti za N_{46} i N_{56} i primenjuju u formuli (28):

$$M = 5.000 \cdot \frac{N_{45+1} - N_{45+10+1}}{D_{45}} = 5.000 \cdot \frac{N_{46} - N_{56}}{D_{45}} = 5.000 \cdot \frac{176.583{,}54 - 80.583{,}644}{12.743{,}15} = \\ = 37.667{,}25 \text{ €}$$

PRIMER 13:

Osoba stara 42 godine osigurala je rentu od 100.000 dinara da je prima doživotno, ali najviše 12 godina.

Koliko iznosi neto miza za ovo osiguranje ako je renta:

a) *anticipativna*
b) *dekurzivna ?*

a) Iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava očitavaju se vrednosti komutativnih brojeva za živa lica N_{42}, N_{54} i D_{42}, koje se zatim zamenjuju u formuli (27):

$$M = 100.000 \cdot \frac{N_{42} - N_{42+12}}{D_{42}} = 100.000 \cdot \frac{N_{42} - N_{54}}{D_{42}} =$$
$$= 100.000 \cdot \frac{231.671,83 - 95.716,636}{14.830,58} = 916.722,03\ din.$$

b) a zatim se očitavaju i vrednosti za N_{43} i N_{55} i primenjuju u formuli (28):

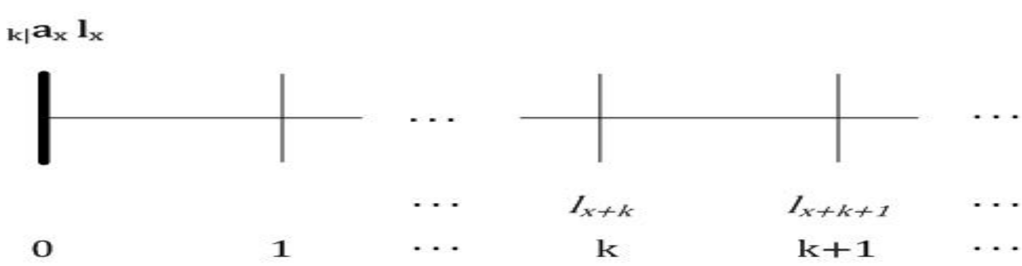
$$M = 100.000 \cdot \frac{N_{42+1} - N_{42+12+1}}{D_{42}} = 100.000 \cdot \frac{N_{43} - N_{55}}{D_{42}} =$$
$$= 100.000 \cdot \frac{216.841,25 - 87.924,184}{14.830,58} = 869.265,17\ din.$$

4.4.3. *Odložena doživotna lična renta*

Odložena doživotna lična renta je renta koju osiguranik prima svake godine (ili na početku ili na kraju godine), ali tek nakon što prođe k godina od trenutka osiguranja (*odloženo*) pa sve do kraja života (*doživotno*).

Ukoliko osiguranik umre pre nego što počne da prima rentu, uplaćena miza (M) ostaje osiguravajućoj kompaniji, a ukoliko umre u toku primanja rente, ona se koristi za isplatu živim osiguranicima.

Vremenska osa za obračun ovakve rente je:



odakle diskontovanjem svih uplata osiguranika i svih isplata osiguravača na trenutak uplate mize (trenutak 0 na vremenskoj osi) i izjednačavanjem sledi:

$$l_x \cdot {}_{k|}a_x = \frac{l_{x+k}}{r^k} + \frac{l_{x+k+1}}{r^{k+1}} + \frac{l_{x+k+2}}{r^{k+2}} + \cdots$$

Miza (M) za *anticipativnu* odloženu doživotnu ličnu rentu (R) iznosi:

$$\boldsymbol{M = R \cdot {}_{k|}a_x = R \cdot \frac{N_{x+k}}{D_x}} \qquad (29)$$

Miza (M) za *dekurzivnu* odloženu doživotnu ličnu rentu (R) iznosi:

$$\boldsymbol{M = R \cdot {}_{k|}a_x = R \cdot \frac{N_{x+k+1}}{D_x}} \qquad (30)$$

<u>PRIMER 14</u>:

Osoba od 37 godina se osigurala da prima svake godine rentu od R=5.000 € doživotno, ali tek nakon 12 godina od trenutka osiguranja (uplate mize).

Kolika je neto miza uplaćena za ovo osiguranje ako je renta:

a) anticipativna
b) dekurzivna ?

a) Iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava očitavaju se vrednosti komutativnih brojeva za živa lica N_{49} i D_{37}, koje se zatim zamenjuju u formuli (29):

$$M = 5.000 \cdot \frac{N_{37+12}}{D_{37}} = 5.000 \cdot \frac{N_{49}}{D_{37}} = 5.000 \cdot \frac{142.094{,}38}{18.986{,}95} = 37.419{,}55\ €$$

b) zatim se očitava i vrednost za N_{50} i primenjuje u formuli (30):

$$M = 5.000 \cdot \frac{N_{37+12+1}}{D_{37}} = 5.000 \cdot \frac{N_{50}}{D_{37}} = 5.000 \cdot \frac{131.765{,}62}{18.986{,}95} = 34.698{,}99\ €$$

PRIMER 15:

Lice staro 52 godine osiguralo je rentu od 100.000 dinara da je prima svake godine doživotno, ali tek po isteku 7 godina od dana osiguranja.

Koliku će neto mizu uplatiti ovo lice ako je renta:

a) anticipativna
b) dekurzivna ?

a) Iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava očitavaju se vrednosti komutativnih brojeva za živa lica N_{59} i D_{52}, koje se zatim zamenjuju u formuli (29):

$$M = 100.000 \cdot \frac{N_{52+7}}{D_{52}} = 100.000 \cdot \frac{N_{59}}{D_{52}} = 100.000 \cdot \frac{61.109{,}405}{8.749{,}395} = 698.441{,}49\ din.$$

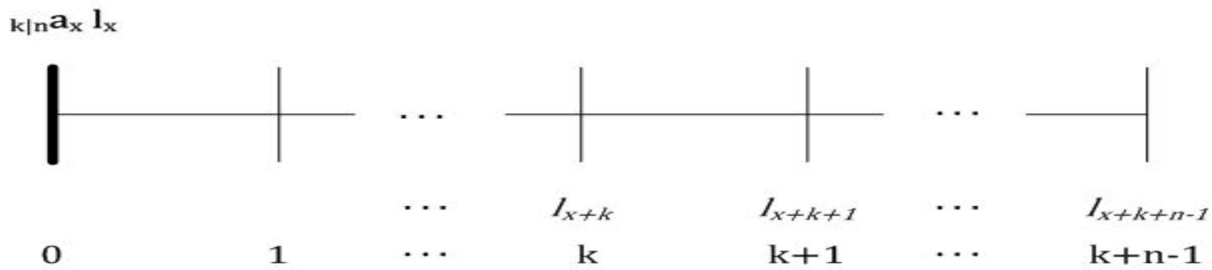
b) zatim se očitava i vrednost za N_{60} i primenjuje u formuli (30):

$$M = 100.000 \cdot \frac{N_{52+7+1}}{D_{52}} = 100.000 \cdot \frac{N_{60}}{D_{52}} = 100.000 \cdot \frac{55.414{,}907}{8.749{,}395} = 633.357{,}36\ din.$$

4.4.4. *Odložena privremena lična renta*

Odložena privremena lična renta je renta koju osiguranik prima svake godine (na početku ili na kraju godine), nakon *k* godina od trenutka uplate mize (*odloženo*), ali tačno *n* godina (*privremeno*) ili manje od *n* godina ukoliko je pre isteka tih *n* godina preminuo.

Vremenska osa za obračun ovakvog osiguranja je:



odakle diskontovanjem svih uplata osiguranika i isplata osiguravajuće kompanije na isti vremenski trenutak uplate mize (trenutak 0) i izjednačavanjem sledi:

$$l_x \cdot \; _{k|n}a_x = \frac{l_{x+k}}{r^k} + \frac{l_{x+k+1}}{r^{k+1}} + \frac{l_{x+k+2}}{r^{k+2}} + \cdots + \frac{l_{x+k+n-1}}{r^{k+n-1}}$$

Miza (M) za *anticipativnu* odloženu privremenu ličnu rentu (R) iznosi:

$$\boldsymbol{M = R \cdot \; _{k|n}a_x = R \cdot \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x}} \qquad (31)$$

Miza (M) za *dekurzivnu* odloženu privremenu ličnu rentu (R) iznosi:

$$\boldsymbol{M = R \cdot \; _{k|n}a_x = R \cdot \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x}} \qquad (32)$$

<u>PRIMER 16</u>:

Osoba od 33 godine se osigurala da prima svake godine rentu od R=5.000 €, ali tek nakon 15 godina od trenutka osiguranja i tačno 10 godina ili manje ukoliko doživi smrt pre isteka tih 10 godina.

Kolika je neto miza uplaćena za ovo osiguranje ako je renta:

a) *anticipativna*
b) *dekurzivna ?*

a) Vrednosti komutativnih brojeva za živa lica N_{48}, N_{58} i D_{33} očitavaju se iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava i primenjuju u formuli (31):

$$M = 5.000 \cdot \frac{N_{33+15} - N_{33+15+10}}{D_{33}} = 5.000 \cdot \frac{N_{48} - N_{58}}{D_{33}} =$$
$$= 5.000 \cdot \frac{152.991{,}67 - 67.192{,}181}{23.048{,}30} = 18.612{,}96 \text{ €}$$

b) Takođe, očitavaju se i vrednosti za N_{49} i N_{59} i zamenjuju u formuli (32):

$$M = 5.000 \cdot \frac{N_{33+15+1} - N_{33+15+10+1}}{D_{33}} = 5.000 \cdot \frac{N_{49} - N_{59}}{D_{33}} =$$
$$= 5.000 \cdot \frac{142.094{,}38 - 61.109{,}405}{23.048{,}30} = 17.568{,}54 \text{ €}$$

PRIMER 17:

Osoba stara 28 godina osigurala je rentu od 100.000 dinara da je prima po isteku 7 godina od dana osiguranja, ali najviše sledećih 20 godina.

Kolika iznosi neto miza uplaćena za ovo osiguranje ako je renta:

a) anticipativna

b) dekurzivna ?

a) Vrednosti komutativnih brojeva za živa lica N_{35}, N_{55} i D_{28} očitavaju se iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava i primenjuju u formuli (31):

$$M = 100.000 \cdot \frac{N_{28+7} - N_{28+7+20}}{D_{28}} = 100.000 \cdot \frac{N_{35} - N_{55}}{D_{28}} =$$
$$= 100.000 \cdot \frac{358.785{,}45 - 87.924{,}184}{29.254{,}64} = 925.874{,}55 \, din.$$

b) Takođe, očitavaju se i vrednosti za N_{36} i N_{56} i zamenjuju u formuli (32):

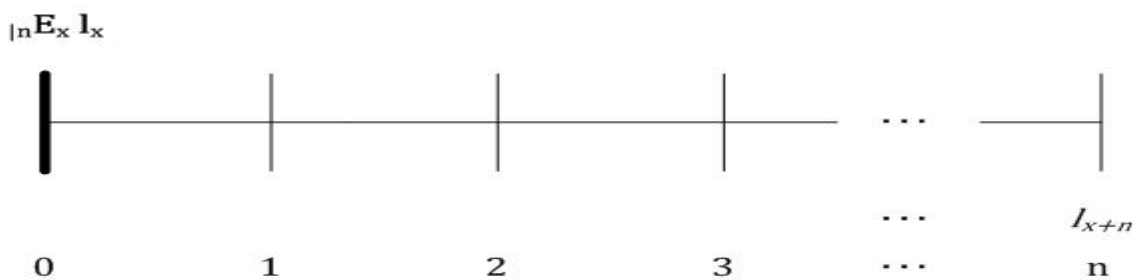
$$M = 100.000 \cdot \frac{N_{28+7+1} - N_{28+7+20+1}}{D_{28}} = 100.000 \cdot \frac{N_{36} - N_{56}}{D_{28}} =$$
$$= 100.000 \cdot \frac{337.858,15 - 80.583,644}{29.254,64} = 879.431,45\ din.$$

4.5. Osiguranje kapitala (K) uplatom mize (jednokratne premije)

4.5.1. Osiguranje kapitala za slučaj doživljenja

Osiguranje kapitala za slučaj doživljenja je vrsta osiguranja gde se osigurani kapital (K) isplaćuje osiguraniku samo ukoliko doživi ugovoreni rok za isplatu, odnosno samo *ukoliko je živ u trenutku n* koji je dogovoren za isplatu. U suprotnom, osigurana suma ostaje osiguravajućoj kompaniji.

Ako neto mizu za 1 dinar ovakvog osiguranja obeležimo sa $_{|n}\boldsymbol{E_x}$, onda je vremenska osa za ovakav obračun:



jer je u trenutku 0 svako od l_x živih lica uplatilo po $_{|n}E_x$ dinara, tj. ukupno su uplatili $_{|n}E_x \cdot l_x$ dinara, a osiguravajuće društvo je isplatilo po 1 dinar svakom od preživelih l_{x+n} osiguranika, odnosno ukupno l_{x+n} dinara.

Diskontovanjem na isti vremenski trenutak (trenutak uplate mize 0) i izjednačavanjem zbira svih isplata osiguravajuće kompanije i zbir svih uplata od strane osiguranika se mora izjednačiti. Na ovaj način, dobija se sledeća jednakost:

$$l_x \cdot {}_{|n}E_x = \frac{l_{x+n}}{r^n}$$

Miza (M) za osiguranje kapitala K za slučaj doživljenja iznosi:

$$\boldsymbol{M = K \cdot {}_{|n}E_x = K \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}} \qquad (33)$$

<u>PRIMER 18</u>:

Osoba od 37 godina osigurala je 10.000 € da joj se isplati kada napuni 67 godina, naravno ukoliko doživi te godine.

Kolika je neto miza uplaćena za ovakvo osiguranje?

Iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava očitavaju se vrednosti za D_{67} i D_{37} i zamenjuju u formuli (33):

$$M = 10.000 \cdot \frac{D_{37+30}}{D_{37}} = 10.000 \cdot \frac{D_{67}}{D_{37}} = 10.000 \cdot \frac{3.074,814}{18.986,95} = 1.619,44 \text{ €}$$

<u>PRIMER 19</u>:

Lice staro 35 godina osiguralo je 100.000 dinara da joj se isplati ukoliko doživi 55 godina starosti.

Izračunati neto mizu za ovakav oblik osiguranja.

Iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava očitavaju se vrednosti za D_{55} i D_{35} i zamenjuju u formuli (33):

$$M = 100.000 \cdot \frac{D_{35+20}}{D_{35}} = 100.000 \cdot \frac{D_{55}}{D_{35}} = 100.000 \cdot \frac{7.340,54}{20.927,30} = 35.076,38\ din.$$

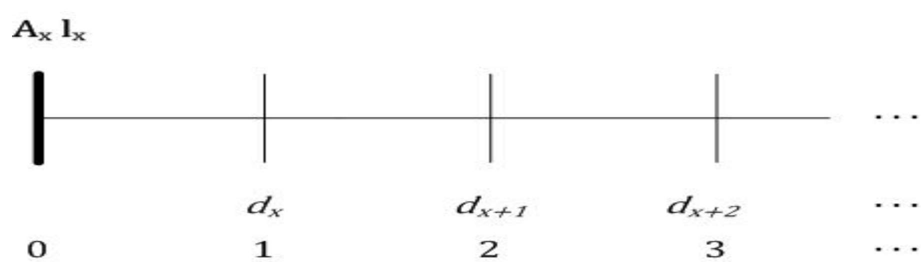
4.5.2. Osiguranje kapitala za slučaj smrti

4.5.2.1. Doživotno osiguranje kapitala za slučaj smrti

Doživotno osiguranje kapitala za slučaj smrti je vrsta osiguranja gde se osigurani kapital (K) isplaćuje *naslednicima* na kraju godine u kojoj je nastupila smrt osiguranika.

Neka je A_x neto miza koja je uplaćena za 1 dinar ovakvog osiguranja. Pretpostavimo da je u trenutku 0 došlo l_x živih lica starih x godina koji žele da se osiguraju na ovaj način. Svako od tih l_x živih lica uplatilo je po A_x dinara, a osiguravajuća kompanija isplaćuje na kraju prve, druge, treće,... godine redom po d_x, d_{x+1}, d_{x+2}, d_{x+3},... dinara.

Vremenska osa za obračun ovakvog osiguranja je:



odakle diskontovanjem svih isplata osiguravajuće kompanije na trenutak uplate mize od strane svih osiguranika (vremenski trenutak 0 na osi) i njihovim izjednačavanjem sledi:

$$l_x \cdot A_x = \frac{d_x}{r} + \frac{d_{x+1}}{r^2} + \frac{d_{x+2}}{r^3} + \cdots$$

Miza (M) za doživotno osiguranje kapitala K za slučaj smrti iznosi:

$$\boldsymbol{M = K \cdot A_x = K \cdot \frac{M_x}{D_x}} \tag{34}$$

PRIMER 20:

Osoba od 31 godine osigurala je 10.000 € da se isplati njenim naslednicima kada god ona umrla, na kraju te godine.

Kolika je neto miza uplaćena za ovakvo osiguranje?

Iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava očitava se vrednost komutativnog broja za umrla lica M_{31} i vrednost komutativnog broja za živa lica D_{31} i zamenjuju u formuli (34):

$$M = 10.000 \cdot \frac{M_{31}}{D_{31}} = 10.000 \cdot \frac{7.930,23}{25.366,62} = 3.126,25\ €$$

PRIMER 21:

Lice staro 45 godina osiguralo je 100.000 dinara da se isplati naslednicima nakon njegove smrti, bez obzira na vreme nastupanja smrti.

Izračunati neto mizu koja je uplaćena za ovakvo osiguranje.

Iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava očitava se vrednost komutativnog broja za umrla lica M_{45} i vrednost komutativnog broja za živa lica D_{45} i zamenjuju u formuli (34):

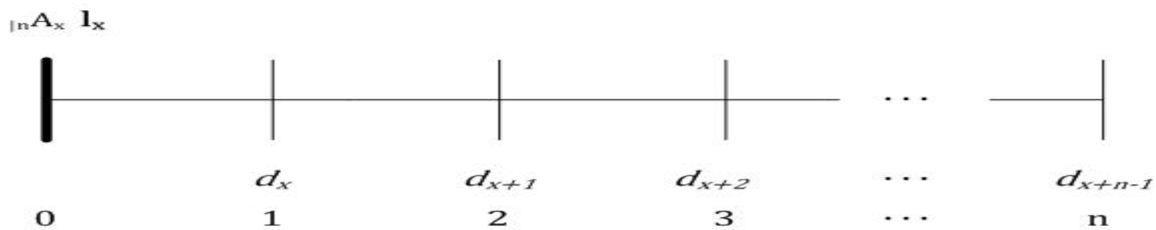
$$M = 100.000 \cdot \frac{M_{45}}{D_{45}} = 100.000 \cdot \frac{5.461,36}{12.743,15} = 42.857,22\ din.$$

4.5.2.2. Privremeno osiguranje kapitala za slučaj smrti

Privremeno osiguranje kapitala za slučaj smrti je vrsta osiguranja gde se osigurani kapital (K) isplaćuje *naslednicima* na kraju godine smrti osiguranika, ali samo ako je osiguranik umro u toku prvih *n* godina (*privremeno*) od trenutka osiguranja (uplate mize). U protivnom se ne isplaćuje.

Neka je ${}_{|n}A_x$ neto miza koja se uplaćuje za 1 dinar ovakvog osiguranja. Kako je u trenutku 0 došlo l_x živih lica starih x godina koji žele da se osiguraju na ovaj način, svako od tih l_x živih lica uplatilo je po ${}_{|n}A_x$ dinara, a osiguravajuće društvo isplaćuje na kraju prve, druge, treće, ... , *n*-te godine redom po d_x, d_{x+1}, d_{x+2}, ... , d_{x+n-1} dinara.

Vremenska osa za ovakvu vrstu osiguranja je:



odakle diskontovanjem svih isplata osiguravajućeg društva na trenutak uplate mize od strane svih osiguranika (trenutak 0 na vremenskoj osi) i njihovim izjednačavanjem sledi:

$$l_x \cdot {}_{|n}A_x = \frac{d_x}{r} + \frac{d_{x+1}}{r^2} + \frac{d_{x+2}}{r^3} + \cdots + \frac{d_{x+n-1}}{r^n}$$

Miza (M) za privremeno osiguranje kapitala K za slučaj smrti iznosi:

$$\boldsymbol{M = K \cdot {}_{|n}A_x = K \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}} \qquad (35)$$

PRIMER 22:

Osoba od 45 godina osigurala je 10.000 € da se isplati naslednicima na kraju godine smrti, ali najviše 20 godina od trenutka osiguranja. Drugim rečima, ako je ta osoba preminula nakon 65. godine, onda njeni naslednici ne dobijaju ništa.

Kolika je neto miza uplaćena za ovakvu vrstu osiguranja?

Iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava očitavaju se vrednosti komutativnih brojeva za umrla lica M_{45} i M_{65} i vrednost komutativnog broja za živa lica D_{45} i zamenjuju u formuli (35):

$$M = 10.000 \cdot \frac{M_{45} - M_{45+20}}{D_{45}} = 10.000 \cdot \frac{M_{45} - M_{65}}{D_{45}} =$$
$$= 10.000 \cdot \frac{5.461{,}36 - 2.411{,}62}{12.743{,}15} = 2.393{,}24 \text{ €}$$

PRIMER 23:

Osoba stara 32 godine osigurala je 100.000 €dinara da se isplati naslednicima na kraju godine smrti, ukoliko umre u toku 8 godina od dana osiguranja.

Kolika je neto miza uplaćena za ovakvu vrstu osiguranja?

Iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava očitavaju se vrednosti komutativnih brojeva za umrla lica M_{32} i M_{40} i vrednost komutativnog broja za živa lica D_{32} i zamenjuju u formuli (35):

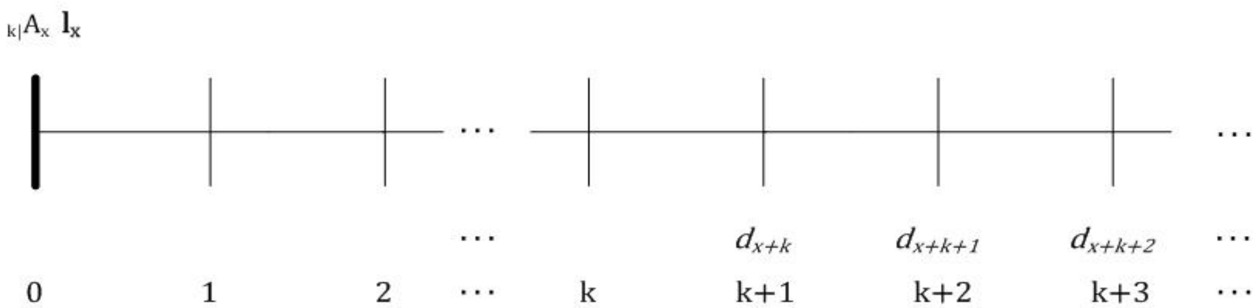
$$M = 100.000 \cdot \frac{M_{32} - M_{32+8}}{D_{32}} = 100.000 \cdot \frac{M_{32} - M_{40}}{D_{32}} =$$
$$= 100.000 \cdot \frac{7.720{,}99 - 6.242{,}42}{24.181{,}75} = 6.114{,}40\ din.$$

4.5.2.3. *Odloženo osiguranje kapitala za slučaj smrti*

Kod **odloženog osiguranja kapitala za slučaj smrti**, osiguravajuća kompanija (osiguravač) se obavezuje da će isplatiti osigurani kapital *naslednicima* na kraju godine smrti osiguranika, ali samo ukoliko osiguranik umre nakon k godina (*odloženo*) od trenutka osiguranja (uplate mize). Ako osiguranik umre pre isteka tih k godina, naslednici ne dobijaju ništa, odnosno kapital ostaje osiguravajućoj kompaniji.

Neka je ${}_{k|}A_x$ neto miza koja se uplaćuje za 1 dinar ovakvog osiguranja. Kako je u trenutku 0 došlo l_x živih lica starih x godina koji žele da se osiguraju na ovaj način, svako od tih l_x živih lica uplatilo je po ${}_{k|}A_x$ dinara, a osiguravajuće društvo isplaćuje na kraju $k+1$-ve, $k+2$-ge, $k+3$-će godine redom po d_{x+k}, d_{x+k+1}, d_{x+k+2}, ... dinara.

Vremenska osa za ovakvu vrstu osiguranja je:



odakle diskontovanjem svih isplata osiguravajućeg društva na trenutak uplate mize od strane svih osiguranika (trenutak 0 na vremenskoj osi) i njihovim izjednačavanjem sledi:

$$l_x \cdot {}_{k|}A_x = \frac{d_{x+k}}{r^{k+1}} + \frac{d_{x+k+1}}{r^{k+2}} + \frac{d_{x+k+2}}{r^{k+3}} + \cdots$$

Miza (M) za odloženo osiguranje kapitala K za slučaj smrti iznosi:

$$\boldsymbol{M = K \cdot {}_{k|}A_x = K \cdot \frac{M_{x+k}}{D_x}} \qquad (36)$$

PRIMER 24:

Osoba od 45 godina osigurala je 10.000 € da se isplati naslednicima na kraju godine smrti, ali samo ako bude živa bar 10 godina od trenutka osiguranja.

Kolika je neto miza uplaćena za ovakvo osiguranje?

Vrednost komutativnog broja za umrla lica M_{55} i vrednost komutativnog broja za živa lica D_{45} očitavaju se iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava i zamenjuju u formuli (36):

$$M = 10.000 \cdot \frac{M_{45+10}}{D_{45}} = 10.000 \cdot \frac{M_{55}}{D_{45}} = 10.000 \cdot \frac{3.958,84}{12.743,15} = 3.106,64 \text{ €}$$

PRIMER 25:

Osoba stara 36 godina osigurala je 100.000 dinara da se isplati naslednicima na kraju godine njene smrti, ali samo u slučaju da je smrt zadesi nakon isteka 16 godina od dana osiguranja.

Izračunati neto mizu koja je uplaćena za ovakvo osiguranje.

Vrednost komutativnog broja za umrla lica M_{52} i vrednost komutativnog broja za živa lica D_{36} očitavaju se iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava i zamenjuju u formuli (36):

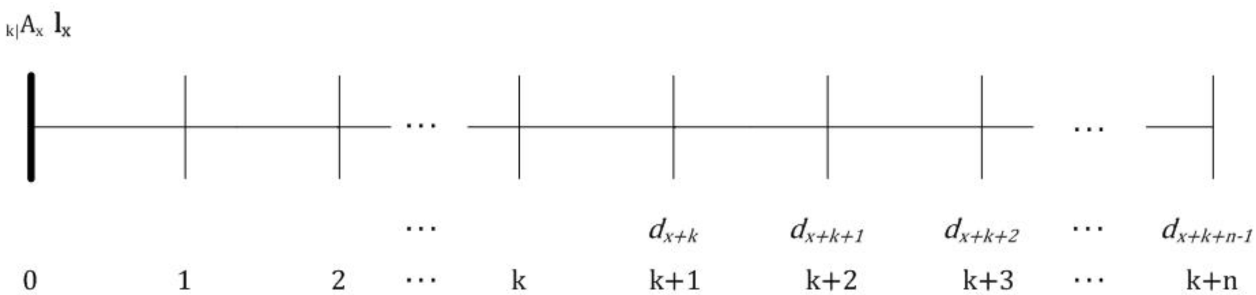
$$M = 100.000 \cdot \frac{M_{36+16}}{D_{36}} = 100.000 \cdot \frac{M_{52}}{D_{36}} = 100.000 \cdot \frac{4.413,71}{19.935,51} =$$
$$= 22.139,94\ din.$$

4.5.2.4. *Odloženo privremeno osiguranje kapitala za slučaj smrti*

Kod **odloženog privremenog osiguranja kapitala za slučaj smrti**, osigurani kapital (K) se isplaćuje naslednicima na kraju godine u kojoj je nastupila smrt osiguranika, samo ako je osiguranik umro nakon *k* godina od trenutka osiguranja (*odloženo*) i nije živeo više od *n* godina (*privremeno*) nakon tih *k* godina. Ako je osiguranik umro pre isteka tih *k* godina, ili nakon tih $k+n$ godina, tada naslednici ne dobijaju ništa, odnosno kapital ostaje osiguravajućem društvu (osiguravaču).

Neka je ${}_{k|n}A_x$ neto miza koja se uplaćuje za 1 dinar ovakvog osiguranja. Kako je u trenutku 0 došlo l_x živih lica starih x godina koji žele da se osiguraju na ovaj način, svako od tih l_x živih lica uplatilo je po ${}_{k|n}A_x$ dinara, a osiguravajuće društvo isplaćuje na kraju $k+1$-ve, $k+2$-ge, $k+3$-će, ... , $k+n$-te godine redom po d_{x+k}, d_{x+k+1}, d_{x+k+2}, ... , d_{x+k+n} dinara naslednicima.

Vremenska osa za ovakvu vrstu osiguranja je:



odakle diskontovanjem svih isplata osiguravajućeg društva na trenutak uplate mize od strane svih osiguranika (trenutak 0 na vremenskoj osi) i njihovim izjednačavanjem sledi:

$$l_x \cdot \ {}_{k|n}A_x = \frac{d_{x+k}}{r^{k+1}} + \frac{d_{x+k+1}}{r^{k+2}} + \frac{d_{x+k+2}}{r^{k+3}} + \cdots + \frac{d_{x+k+n-1}}{r^{k+n}}$$

Miza (M) za odloženo osiguranje kapitala K za slučaj smrti iznosi:

$$\boldsymbol{M = K \cdot \ {}_{k|n}A_x = K \cdot \frac{M_{x+k} - M_{x+k+n}}{D_x}} \qquad (37)$$

<u>PRIMER 26</u>:

Osoba od 45 godina je osigurala 10.000 € da se isplati naslednicima na kraju godine smrti, ali samo ako je smrt nastupila između njene 55 i 65 godine života.

Kolika je neto miza uplaćena za ovakvo osiguranje?

Vrednosti komutativnih brojeva za umrla lica M_{55} i M_{65}, kao i vrednost komutativnog broja za živa lica D_{45} očitavaju se iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava i zamenjuju u formuli (37):

$$M = 10.000 \cdot \frac{M_{45+10} - M_{45+10+10}}{D_{45}} = 10.000 \cdot \frac{M_{55} - M_{65}}{D_{45}} =$$
$$= 10.000 \cdot \frac{3.958{,}84 - 2.411{,}62}{12.743{,}15} = 1.214{,}16 \text{ €}$$

<u>PRIMER 27</u>:

Lice staro 40 godina osiguralo je 100.000 dinara da se isplati naslednicima ukoliko preživi 7 godina od dana osiguranja, a zatim umre u toku narednih 13 godina.

Izračunati neto mizu koja se mora uplatiti za ovo osiguranje.

Vrednosti komutativnih brojeva za umrla lica M_{47} i M_{6570}, kao i vrednost komutativnog broja za živa lica D_{40} očitavaju se iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava i zamenjuju u formuli (37):

$$M = 100.000 \cdot \frac{M_{40+7} - M_{40+7+13}}{D_{40}} = 100.000 \cdot \frac{M_{47} - M_{60}}{D_{40}} =$$
$$= 100.000 \cdot \frac{5.162{,}31 - 3.189{,}47}{16.382{,}56} = 12.042{,}32 \; din.$$

4.6. Osiguranje kapitala (K) uplatom premije

Osiguranje kapitala uplatom mize – jednokratne premije je nepraktično sa aspekta osiguranika. Pošto osiguranik, u većini slučajeva, ne raspolaže tako velikim sredstvima, lakše mu je da raspodeli uplatu za osiguranje na više jednakih vremenskih intervala u jednakim iznosima (npr. godišnjim).

Premije se ne plaćaju posle smrti osiguranika, bez obzira da li osiguranik plaća premiju doživotno ili privremeno. Prva premija se plaća na dan osiguranja.

Premija može biti:

1. doživotna godišnja premija

a) neposredno doživotno osiguranje kapitala

b) odloženo doživotno osiguranje kapitala

2. privremena godišnja premija

a) za slučaj smrti
- *doživotno osiguranje kapitala*
- *privremeno osiguranje kapitala*

b) za slučaj doživljenja – privremeno osiguranje kapitala

c) mešovito osiguranje kapitala

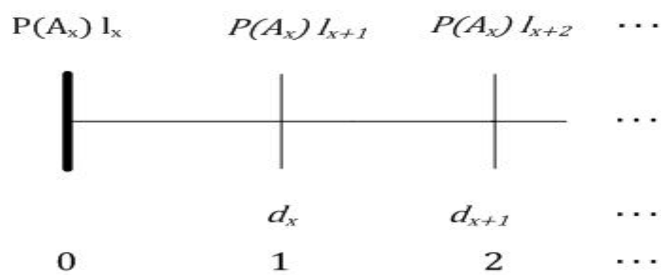
4.6.1. *Osiguranje kapitala doživotnim plaćanjem premije*

4.6.1.1. *Neposredno doživotno osiguranje kapitala doživotnim plaćanjem premije*

Neposredno doživotno osiguranje kapitala doživotnim plaćanjem premije podrazumeva da je osiguranik u obavezi da plaća premiju do kraja života (doživotno), kako bi se njegovim naslednicima isplatila osigurana suma (kapital) na kraju godine smrti osiguranika, bez obzira na godinu smrti i bez uslova i ograničenja.

Neka je l_x živih lica starih x godina odlučilo da se osigura na ovaj način. Svako od tih l_x živih lica će, počevši od dana osiguranja, svake godine uplaćivati po $\boldsymbol{P(A_x)}$ dinara (neto premija za 1 dinar ovakvog osiguranja), kako bi njihovi naslednici dobili osigurani kapital na kraju godine kada je osiguranik preminuo.

Vremenska osa za ovakvu vrstu osiguranja je:



Sada je neophodno sve uplate osiguranika (iznosi iznad vremenske ose) diskontovati na trenutak 0, sabrati ih i staviti na levu stranu jednakosti, i diskontovati sve isplate osiguravajuće kompanije (iznosi ispod vremenske ose), sabrati ih i staviti na desnu stranu jednakosti. Tako se dobija:

$$l_x\, P(A_x) + l_{x+1}\, \frac{P(A_x)}{r} + l_{x+2}\, \frac{P(A_x)}{r^2} + \cdots = \frac{d_x}{r} + \frac{d_{x+1}}{r^2} + \cdots$$

Godišnja premija (P) koju osiguranik plaća svake godine do kraja života, da bi nakon njegove smrti njegovi naslednici dobili kapital od K dinara iznosi:

$$\boldsymbol{P = K \cdot P(A_x) = K \cdot \frac{M_x}{N_x}} \qquad (38)$$

PRIMER 28:

Osoba od 45 godina osigurala je 10.000 € da se isplati njenim naslednicima na kraju godine smrti.

Koliku godišnju premiju mora uplaćivati osiguranik do svoje smrti za ovu vrstu osiguranja?

Vrednost komutativnog broja za umrla lica M_{45} i vrednost komutativnog broja za živa lica N_{45} očitavaju se iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava i primenjuju u formuli (38):

$$P = 10.000 \cdot \frac{M_{45}}{N_{45}} = 10.000 \cdot \frac{5.461,36}{189.326,69} = 288,46 \text{ €}$$

PRIMER 29:

Lice staro 35 godina osiguralo je 100.000 dinara da se isplati naslednicima na kraju godine u kojoj je osigurano lice umrlo, bilo kada da ga smrt zadesi.

Odrediti godišnju neto premiju koja se plaća doživotno.

Vrednost komutativnog broja za umrla lica M_{35} i vrednost komutativnog broja za živa lica N_{35} očitavaju se iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava i primenjuju u formuli (38):

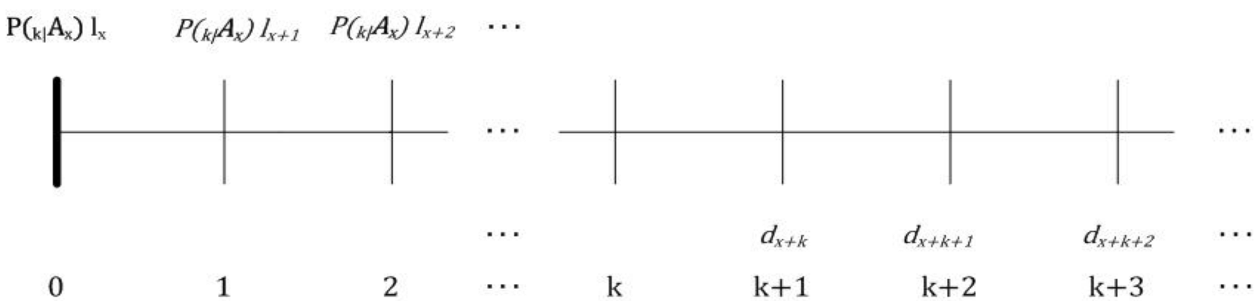
$$P = 100.000 \cdot \frac{M_{35}}{N_{35}} = 100.000 \cdot \frac{7.127,86}{358.785,45} = 1.986,66 \, din.$$

4.6.1.2. *Odloženo doživotno osiguranje kapitala doživotnim plaćanjem premije*

Odloženo doživotno osiguranje kapitala doživotnim plaćanjem premije podrazumeva da je osiguranik u obavezi da plaća premiju do kraja života (doživotno), kako bi se njegovim naslednicima isplatila osigurana suma (kapital) na kraju godine smrti osiguranika, ali samo ukoliko je prošlo najmanje k godina (*odloženo*) od trenutka osiguranja.

Neka je l_x živih lica starih x godina odlučilo da se osigura na ovaj način. Svako od tih l_x živih lica će, počevši od dana osiguranja, svake godine uplaćivati po $P({}_{k|}A_x)$ dinara (neto premija za 1 dinar ovakvog osiguranja), kako bi njihovi naslednici dobili osigurani kapital na kraju godine kada je osiguranik preminuo.

Vremenska osa za ovakvu vrstu osiguranja je:



odakle je neophodno sve uplate osiguranika diskontovati na trenutak 0, sabrati ih i staviti na levu stranu jednakosti, i diskontovati sve isplate osiguravajuće kompanije, sabrati ih i staviti na desnu stranu jednakosti. Tako se dobija:

$$l_x\, P\left({}_{k|}A_x \right) + l_{x+1}\, \frac{P({}_{k|}A_x)}{r} + l_{x+2}\, \frac{P({}_{k|}A_x)}{r^2} + \cdots = \frac{d_{x+k}}{r^{k+1}} + \frac{d_{x+k+1}}{r^{k+2}} + \frac{d_{x+k+2}}{r^{k+3}} + \cdots$$

Godišnja premija (P) koju osiguranik plaća svake godine do kraja života, da bi nakon njegove smrti njegovi naslednici dobili kapital od K dinara, ali samo ako je smrt nastupila nakon k godina od trenutka osiguranja, iznosi:

$$\boldsymbol{P = K \cdot P({}_{k|}A_x) = K \cdot \frac{M_{x+k}}{N_x}} \tag{39}$$

PRIMER 30:

Osoba od 30 godina osigurala je 10.000 € da se isplati naslednicima na kraju godine smrti, ali samo ako je doživela bar 55 godina.

Koliku godišnju premiju mora uplaćivati osiguranik do svoje smrti?

Vrednost komutativnog broja za umrla lica M_{55} i vrednost komutativnog broja za živa lica N_{30} očitavaju se iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava i primenjuju u formuli (39):

$$P = 10.000 \cdot \frac{M_{30+25}}{N_{30}} = 10.000 \cdot \frac{M_{55}}{N_{30}} = 10.000 \cdot \frac{3.958,84}{479.951,73} =$$
$$= 82,48\ €$$

PRIMER 31:

Osoba stara 49 godina osigurala je 100.000 dinara da se isplati naslednicima posle njene smrti, ukoliko je smrt zadesi po isteku prvih 14 godina od dana osiguranja.

Kolika je godišnja neto premija koja se plaća doživotno?

Vrednost komutativnog broja za umrla lica M_{63} i vrednost komutativnog broja za živa lica N_{49} očitavaju se iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava i primenjuju u formuli (39):

$$P = 100.000 \cdot \frac{M_{49+14}}{N_{49}} = 100.000 \cdot \frac{M_{63}}{N_{49}} = 100.000 \cdot \frac{2.722,87}{142.094,38} =$$
$$= 1.916,20\ din.$$

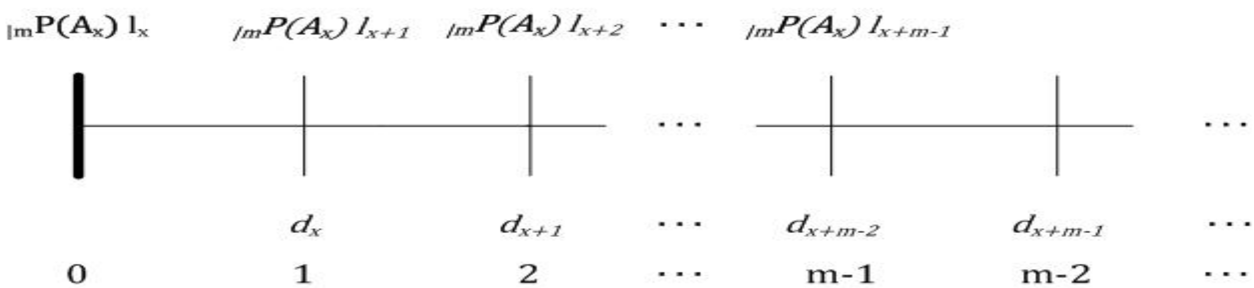
4.6.2. *Osiguranje kapitala privremenim plaćanjem premije*

4.6.2.1. *Doživotno osiguranje kapitala za slučaj smrti privremenim plaćanjem premije*

Doživotno osiguranje kapitala za slučaj smrti privremenim plaćanjem premije podrazumeva da je osiguranik u obavezi da plaća premiju svake godine od dana osiguranja, ali tačno *m* godina (*privremeno*), kako bi se njegovim naslednicima isplatila osigurana suma (kapital) na kraju godine smrti osiguranika, bez obzira na godinu smrti i bez uslova i ograničenja.

Neka je l_x živih lica starih x godina odlučilo da se osigura na ovaj način. Svako od tih l_x živih lica će, počevši od dana osiguranja, svake godine uplaćivati po $_{|m}\boldsymbol{P(A_x)}$ dinara (neto premija za 1 dinar ovakvog osiguranja), ali samo tačno m godina, kako bi njihovi naslednici dobili osigurani kapital na kraju godine kada je osiguranik preminuo.

Vremenska osa za ovakvu vrstu osiguranja je:



Sada je neophodno sve uplate osiguranika i sve isplate osiguravača diskontovati na isti vremenski trenutak (trenutak 0), sabrati ih i staviti na levu i desnu stranu jednakosti, respektivno. Na taj način se dobija:

$$_{|m}P(A_x)\ l_x + \frac{_{|m}P(A_x)}{r} l_{x+1} + \cdots + \frac{_{|m}P(A_x)}{r^{m-1}} l_{x+m-1} = \frac{d_x}{r} + \frac{d_{x+1}}{r^2} + \cdots$$

Godišnja premija (P) koju osiguranik plaća svake godine tačno m godina, da bi nakon njegove smrti njegovi naslednici dobili kapital od K dinara, iznosi:

$$\boldsymbol{P = K \cdot {}_{|m}P\,(A_x) = K \cdot \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}}} \qquad (40)$$

PRIMER 32:

Osoba od 45 godina, osigurala je 10.000 € da se isplati njenim naslednicima na kraju godine smrti.

Kolika godišnja premija se mora uplaćivati tačno 10 godina?

Vrednost komutativnog broja za umrla lica M_{45} i vrednosti komutativnih brojeva za živa lica N_{45} i N_{55} očitavaju se iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava i primenjuju u formuli (40):

$$P = 10.000 \cdot \frac{M_{45}}{N_{45} - N_{45+10}} = 10.000 \cdot \frac{M_{45}}{N_{45} - N_{55}} = 10.000 \cdot \frac{5.461{,}36}{189.326{,}69 - 87.924{,}184} = \\ = 538{,}58\ €$$

PRIMER 33:

Lice staro 30 godina osiguralo se za slučaj smrti na 100.000 dinara ma kad smrt nastupila.

Odrediti godišnju premiju koja se plaća najviše 20 godina.

Vrednost komutativnog broja za umrla lica M_{30} i vrednosti komutativnih brojeva za živa lica N_{30} i N_{50} očitavaju se iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava i primenjuju u formuli (40):

$$P = 100.000 \cdot \frac{M_{30}}{N_{30} - N_{30+20}} = 100.000 \cdot \frac{M_{30}}{N_{30} - N_{50}} = 100.000 \cdot \frac{8.145{,}75}{479.951{,}73 - 131.765{,}62} \\ = 2.339{,}48\ din.$$

Preostale vrste osiguranja kapitala se rešavaju analogno prethodno prikazanom načinu.

4.6.2.2. Privremeno osiguranje kapitala za slučaj smrti privremenim plaćanjem premije

Kod **privremenog osiguranja kapitala za slučaj smrti privremenim plaćanjem premije** osiguranik je u obavezi da plaća premiju svake godine od dana osiguranja, ali tačno *m* godina (*privremeno*), kako bi se njegovim naslednicima isplatila osigurana suma (kapital) na kraju godine smrti osiguranika, ali samo ukoliko osiguranik umre u toku prvih *n* godina (*privremeno*). Ako umre nakon isteka tih *n* godina, kapital se ne isplaćuje nikom.

Neka je l_x živih lica starih *x* godina odlučilo da se osigura na ovaj način. Svako od tih l_x živih lica će, počevši od dana osiguranja, svake godine uplaćivati po $_{|m}\boldsymbol{P}(_{|n}\boldsymbol{A}_x)$ dinara (neto premija za 1 dinar ovakvog osiguranja), ali samo tačno *m* godina, kako bi njihovi naslednici dobili osigurani kapital na kraju godine kada je osiguranik preminuo, ali samo u toku prvih *n* godina.

Godišnja premija (P) koju osiguranik plaća svake godine tačno m godina, da bi nakon njegove smrti njegovi naslednici dobili kapital od K dinara, ali samo ukoliko osiguranik umre u toku n godina, iznosi:

$$\boldsymbol{P = K \cdot {}_{|m}P\left({}_{|n}A_x\right) = K \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}} \tag{41}$$

<u>PRIMER 34:</u>

Lice staro 35 godina osigurava kapital od 10.000 € koji se isplaćuje naslednicima, ako osiguranik umre u toku prvih 20 godina.

Koliko iznosi neto premija koja se plaća prvih 14 godina?

Iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava očitavaju se vrednosti komutativnih brojeva za umrla lica M_{35} i M_{55}, kao i vrednosti komutativnih brojeva za živa lica N_{35} i N_{49} i primenjuju u formuli (41):

$$P = 10.000 \cdot \frac{M_{35} - M_{35+20}}{N_{35} - N_{35+14}} = 10.000 \cdot \frac{M_{35} - M_{55}}{N_{35} - N_{49}} = 10.000 \cdot \frac{7.127{,}86 - 3.958{,}84}{358.785{,}45 - 142.094{,}38} = \\ = 146{,}25\ €$$

PRIMER 35:

Osiguranik star 40 godina osigurao se za slučaj smrti na 80.000 dinara, ali samo do svoje 60. godine.

Koliko će iznositi godišnja premija?

Iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava očitavaju se vrednosti komutativnih brojeva za umrla lica M_{40} i M_{60}, kao i vrednosti komutativnih brojeva za živa lica N_{40} i N_{60} i primenjuju u formuli (41):

$$P = 80.000 \cdot \frac{M_{40} - M_{40+20}}{N_{40} - N_{40+20}} = 80.000 \cdot \frac{M_{40} - M_{60}}{N_{40} - N_{60}} = 80.000 \cdot \frac{6.242,42 - 3.189,47}{263.643,62 - 55.414,907} = \\ = 1.172,80\ din.$$

4.6.2.3. Privremeno osiguranje kapitala za slučaj doživljenja privremenim plaćanjem premije

Kod **privremenog osiguranja kapitala za slučaj doživljenja privremenim plaćanjem premije** osiguranik je u obavezi da plaća premiju svake godine od dana osiguranja, ali tačno *m* godina (*privremeno*), kako bi se njemu isplatila osigurana suma (kapital), ali samo ukoliko doživi *n* godina (*privremeno*).

Neka je l_x živih lica starih *x* godina odlučilo da se osigura na ovaj način. Svako od tih l_x živih lica će, počevši od dana osiguranja, svake godine uplaćivati po $_{|m}P(_{|n}E_x)$ dinara (neto premija za 1 dinar ovakvog osiguranja), ali samo tačno *m* godina, kako bi dobili osigurani kapital ukoliko dožive tačno određeni broj *n* godina.

Godišnja premija (P) koju osiguranik plaća svake godine tačno m godina, da bi dobio kapital od K dinara, ali samo ukoliko doživi n godina, iznosi:

$$\boldsymbol{P = K \cdot \ _{|m}P\left(_{|n}E_x\right) = K \cdot \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}} \qquad (42)$$

PRIMER 36:

Lice staro 35 godina osigurava kapital od 10.000 €. Kapital se isplaćuje samom osiguraniku ako doživi 20 godina od dana osiguranja.

Koliko iznosi premija koja se plaća 14 godina?

Vrednosti komutativnih brojeva za živa lica D_{55}, N_{35} i N_{49} očitavaju se iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava i zamenjuju u formuli (42):

$$P = 10.000 \cdot \frac{D_{35+20}}{N_{35} - N_{35+14}} = 10.000 \cdot \frac{D_{55}}{N_{35} - N_{49}} = 10.000 \cdot \frac{7.340{,}54}{358.785{,}45 - 142.094{,}38} = \\ = 338{,}76\ €$$

PRIMER 37:

Lice staro 40 godina osigurava kapital od 100.000 dinara da mu se isplati samo ako doživi 60 godina starosti.

Odrediti godišnju premiju koja se plaća 20 godina.

Vrednosti komutativnih brojeva za živa lica D_{60}, N_{40} i N_{60} očitavaju se iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava i zamenjuju u formuli (42):

$$P = 100.000 \cdot \frac{D_{40+20}}{N_{40} - N_{40+20}} = 100.000 \cdot \frac{D_{60}}{N_{40} - N_{60}} == 100.000 \cdot \frac{5.320{,}816}{263.643{,}62 - 55.414{,}907} \\ = 2.555{,}27\ din.$$

4.6.2.4. *Mešovito osiguranje kapitala privremenim plaćanjem premije*

Mešovito osiguranje kapitala privremenim plaćanjem premije zapravo predstavlja spajanje osiguranja za slučaj doživljenja sa osiguranjem za slučaj smrti.

Predstavlja vrstu životnog osiguranja gde se osiguranik obavezuje da plaća premiju tačno *m* godina (*privremeno*), a osiguravač se obavezuje da će isplatiti osigurani kapital (K) ili osiguraniku (ukoliko doživi tačno određeni broj *n* godina), ili njegovim naslednicima (ukoliko osiguranik umre pre isteka tih *n* godina).

Godišnja premija (P) za ovakvu vrstu osiguranja se izračunava kao:

$$\boldsymbol{P = K \cdot \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}} \tag{43}$$

<u>PRIMER 38:</u>

Lice staro 35 godina osigurava kapital od 10.000 €. Kapital se isplaćuje naslednicima, ako osiguranik umre u prvih 20 godina ili osiguraniku, ako doživi 20 godina od dana osiguranja.

Koliko iznosi godišnja neto premija koja se plaća prvih 14 godina?

Vrednosti komutativnih brojeva za umrla lica M_{35} i M_{55}, kao i vrednosti komutativnih brojeva za živa lica D_{55}, N_{35} i N_{49} očitavaju se iz Tablice smrtnosti 17 engleskih društava i zamenjuju u formuli (43):

$$P = 10.000 \cdot \frac{M_{35} - M_{35+20} + D_{35+20}}{N_{35} - N_{35+14}} = 10.000 \cdot \frac{M_{35} - M_{55} + D_{55}}{N_{35} - N_{49}} =$$

$$= 10.000 \cdot \frac{7.127{,}86 - 3.958{,}84 + 7.340{,}54}{358.785{,}45 - 142.094{,}38} = 485\ €$$

I I D E O

1. VEROVATNOĆA

Neke od pojava koje se događaju oko nas se mogu predvideti, objasniti i kontrolisati zato što su poznate zakonitosti njihovog nastanka. Tako na primer, mogu se predvideti pomračenje sunca i meseca, pojava plime i oseke, elektriciteta i slično.

Nasuprot tome, postoje pojave čije uzroke nije moguće odrediti, pa se takve pojave ne mogu u potpunosti predvideti i objasniti. Takve pojave su na primer, meteorološke pojave, pojava zemljotresa, ali i dobitak na lutriji, sportskoj kladionici itd. To su pojave – događaji koji se ne moraju nužno dogoditi, ali nisu ni nemogući. Proučavanjem ovakvih i sličnih događaja i zakonitostima njihovog nastanka bavi se **teorija verovatnoće**.

Da bi se bolje moglo objasniti čime se bavi teorija verovatnoće, posmatraćemo sledeći primer:

Bacanje novčića

Prilikom bacanja novčića, može da padne ili pismo ili grb i obe mogućnosti su jednako verovatne. Ako se novčić baca više puta, onda se može očekivati da se broj grbova neće mnogo razlikovati od broja pisama. Kod malog broja bacanja to ne mora da se dogodi, ali pri velikom broju bacanja to će u velikoj meri biti ispunjeno.

Izvršeni su sledeći eksperimenti:

- *Bufon* je bacio novčić 4.040 puta i 2.060 puta je dobio grb
- *Pirson* je bacio novčić 12.000 puta i dobio je 6.019 puta grb, a kada je bacio 24.000 puta, dobio je grb 12.012 puta

Frekvencije pojave grba u ovim eksperimentima su 0,5100; 0,5016 i 0,5005. Odavde se može videti da veliki broj ponavljanja eksperimenta izražava neku zakonitost u pogledu broja grbova.

Kod ovog i drugih sličnih primera se može uočiti da se, pri pojedinačnim posmatranjima, događaji realizuju bez ikakvog reda, po čistoj slučajnosti, bez mogućnosti predviđanja. Tako, na primer, kada bacamo novčić ne možemo znati da li će pasti pismo ili grb. Ali, pri velikom broju ponavljanja, odnosno ponavljanja eksperimenta, moguće je uočiti neke zakonitosti. Upravo se takvim zakonitostima bavi teorija verovatnoće.

1.1. Slučajni eksperimenti i slučajni događaji

Eksperiment (opit) se u nauci koristi za prikupljanje podataka koji se zatim obrađuju, a dobijeni rezultati koriste u praksi ili za dokazivanje novih teorija.

Međutim, kod nekih eksperimenata nije moguće tačno odrediti i kontrolisati vrednosti dobijenih rezultata, odnosno ti rezultati se ne mogu pouzdano predvideti. Takvi eksperimenti su predmet izučavanja teorije verovatnoće i nazivaju se **SLUČAJNI EKSPERIMENTI**. Nazivaju se još i *statistički* ili *stohastički* eksperimenti.

Primeri slučajnih ekperimenata:

- *Bacanje novčića* – ovaj eksperiment se može ponavljati proizvoljno mnogo puta, a mogući ishodi ovog eksperimenta su uvek ili „grb“ ili „pismo“.
- *Bacanje kockice* – ishodi ovog eksperimenta su uvek vrednosti koje pripadaju sledećem skupu {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
- *Pol deteta* – mogući ishodi su uvek ili „muško“ ili „žensko“.

Teorija verovatnoće za svoja istraživanja koristi ***idealni eksperiment****:*

- može da se ponavlja proizvoljan broj puta pod istim uslovima,
- svi njegovi ishodi su unapred definisani,
- ishod pojedinačnog eksperimenta nije unapred poznat.

Ishod slučajnog eksperimenta naziva se **SLUČAJAN DOGAĐAJ**. Pol deteta ili pojava „grba“ pri bacanju novčića su slučajni događaji.

Slučajni događaji mogu biti: ***elementarni*** (ne mogu se redukovati na jednostavnije) i ***složeni*** (mogu se dalje redukovati na elementarne događaje).

Polazna osnova za proučavanje slučajnih događaja je određivanje **SKUPA (PROSTORA) ELEMENTARNIH DOGAĐAJA**.

- Svaki eksperiment (opit) se završava nekim ishodom. Svaki mogući ishod eksperimenta naziva se ***elementarni događaj*** i obeležava se sa $\boldsymbol{\omega}$.
- Skup svih elementarnih događaja nekog eksperimenta naziva se ***skup (prostor) ishoda*** eksperimenta, a obeležava se sa $\boldsymbol{\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}}$.
- Svaki podskup skupa Ω naziva se ***događaj***. Događaji se obeležavaju velikim slovima A, B, C,...
- Svaki događaj se mora *precizno opisati* kao A = „........“, B = „........“
- Događaj koji se pojavljuje prilikom svake realizacije eksperimenta, naziva se ***siguran (pouzdan) događaj***.
- Događaj koji se nikada ne može pojaviti pri realizaciji eksperimenta je ***nemoguć događaj***. Obeležava se kao prazan skup $\emptyset$**.**

PRIMER 1:

Navesti moguće ishode u eksperimentu bacanja jednog novčića.

Mogući ishodi prilikom bacanja novčića su „grb“ i „pismo“.
Ω = {G, P}

PRIMER 2:

Koji su mogući ishodi prilikom bacanja kockice?

Mogući ishodi prilikom bacanja kockice su 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

<u>PRIMER 3</u>:

Napisati moguće ishode da prilikom bacanja kockice padne paran broj.

A = „pada paran broj“

Događaj da padne paran broj ima ishode 2, 4, 6.
Ω = {2, 4, 6}

***Događaj da kada se baca kockica padne bilo koji broj od 1 do 6 *je siguran događaj*, a da padne broj 7 je *nemoguć događaj*.

<u>PRIMER 4</u>:

Odrediti skup svih elementarnih događaja za sledeće eksperimente (opite):

a) *bacanje jednog novčića*
b) *bacanje dva novčića*
c) *bacanje tri novćića*
d) *bacanje jedne kockice*
e) *bacanje dve kockice*
f) *bacanje tri kockice*

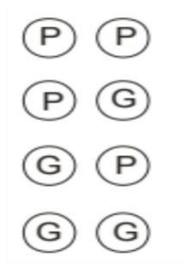
a) bacanje jednog novčića

Prilikom bacanja novčića može da padne ili „pismo“ ili „grb“.

Ako sa ω_1 obeležimo pojavu pisma na gornjoj strani novčića, a sa ω_2 pojavu grba, onda je skup svih elementarnih događaja ovog eksperimenta:
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, odnosno $\Omega = \{P, G\}$.

b) bacanje dva novčića

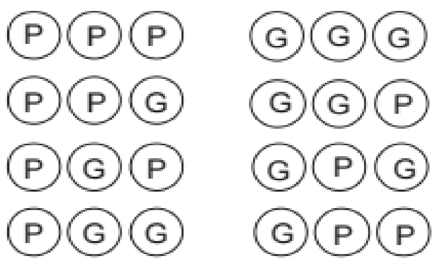
Na gornjoj strani novčića se mogu pojaviti 4 ishoda:



Prema tome, skup mogućih ishoda je: Ω = {PP, PG, GP, GG}.

c) bacanje tri novčića

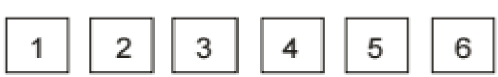
Na gornjoj strani novčića se mogu pojaviti 8 ishoda:



Prema tome, skup mogućih ishoda je:
Ω = {PPP, PPG, PGP, PGG, GGG, GGP, GPG, GPP}.

d) bacanje jedne kockice

Na gornjoj strani kocke može pasti jedan od brojeva:



pa je skup svih elementarnih događaja: Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

e) bacanje dve kockice

Pri bacanju dve kockice, broj mogućih ishoda je veći: $6^2 = 36$

1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1
1 2	2 2	3 2	4 2	5 2	6 2
1 3	2 3	3 3	4 3	5 3	6 3
1 4	2 4	3 4	4 4	5 4	6 4
1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	6 5
1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

pa je skup mogućih ishoda: Ω = {11, 12, 13, 14, 15, 16, ... , 65, 66}.

f) bacanje tri kockice

Pri bacanju tri kockice, broj mogućih ishoda je $6^3 = 216$, pa je skup mogućih ishoda: Ω = {111, 112, 113, 114, ... , 666}.

1.2. Algebra događaja

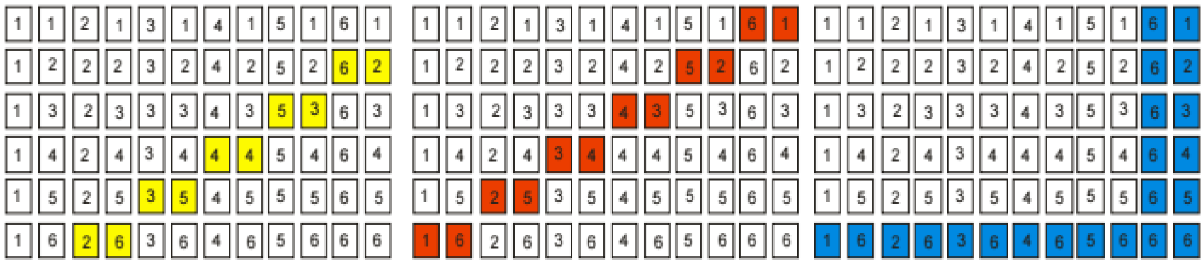
Ako posmatramo 2 događaja koji se mogu dogoditi u istom eksperimentu, oni mogu biti **zavisni** i **nezavisni**.

PRIMER 5:

Bacamo 2 kockice. Posmatramo 3 događaja:

1. *Događaj A: „pao je zbir 8“*
2. *Događaj B: „pao je zbir 7“*
3. *Događaj C: „pala je bar jedna 6“*

Ispitati da li su ovi događaji međusobno zavisni ili ne.



A:"pao je zbir 8" B:"pao je zbir 7" C:"pala je bar jedna šestica"

Događaji A i B su nezavisni.

Međutim, ako se posmatraju događaji A i C, može se videti da su oni zavisni, jer se oba događaja dešavaju kad padne (2, 6) i (6, 2).

Takođe, događaji B i C su zavisni, jer kod oba događaja imamo (1, 6) i (6, 1).

Pošto se događaji definišu kao podskupovi skupa elementarnih događaja Ω, moguće je veze između događaja izraziti pomoću odgovarajućih **skupovnih relacija i operacija**:

- **zbir (unija)** dva događaja – $\mathbf{A \cup B}$ ili **A+B** – realizuje se bar jedan od događaja, tj. ili događaj A ili događaj B ili oba događaja
- **proizvod (presek)** dva događaja – $\mathbf{A \cap B}$ ili **AB** – oba događaja se realizuju
- događaj A, ali ne događaj B – **A\B**
- **suprotan događaj** događaju A (komplement) – $\bar{\mathbf{A}}$ ili $\mathbf{A^c}$ ili **A′**
- ako događaj A povlači (implicira) događaj B, tada se kaže da je $\mathbf{A \subset B}$
- ako za događaje A i B važi da je $A \subset B$ i $B \subset A$, onda se kaže da su događaji A i B jednaki i piše se **A = B**
- **verovatnoća** slučajnog događaja A – **P(A)**

PRIMER 6:

Događaj A („da se na gornjoj strani kocke pojavi broj 5“), odnosno događaj B („da se pojavi paran broj“), su događaji koji se isključuju – ***disjunktni su***.

<u>PRIMER 7</u>:

Zbir (unija) događaja A („da se na kocki pojavi broj veći od 3“) i događaja B („da se pojavi paran broj“):

$A \cup B = \{4, 5, 6\} \cup \{2, 4, 6\} = \{2, 4, 5, 6\}$

<u>PRIMER 8</u>:

Proizvod (presek) događaja A („pojava parnog broja na gornjoj strani kocke“) i događaja B („pojava broja većeg od 3“).

$A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\}$

1.2.1. Pravila algebre događaja

1. $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$

Verovatnoća se „meri“ od 0 do 1. Verovatnoća 0 je verovatnoća nemogućeg događaja, a verovatnoća 1 je verovatnoća sigurnog događaja.

2. $\mathbf{P(A) + P(\bar{A}) = 1} \qquad \mathbf{P(A) = 1 - P(\bar{A})}$

Kada se sabere verovatnoća nekog događaja sa verovatnoćom njemu suprotnog događaja, dobija se siguran događaj.

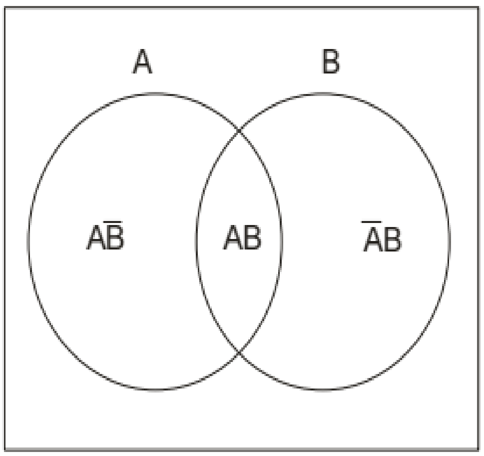
3. Ako je $\mathbf{A \subset B}$, onda je $\mathbf{P(A) \leq P(B)}$.

<u>PRIMER 9</u>:

Data su dva događaja A i B. Pomoću simboličkih operacija sa datim događajima odrediti sledeće događaje:

a) *realizovan je događaj A, a nije događaj B*
b) *realizovan je događaj B, a nije događaj A*
c) *realizovana su oba događaja*

Najpre je neophodno pogledati sliku gde su događaji predstavljeni pomoću skupova:



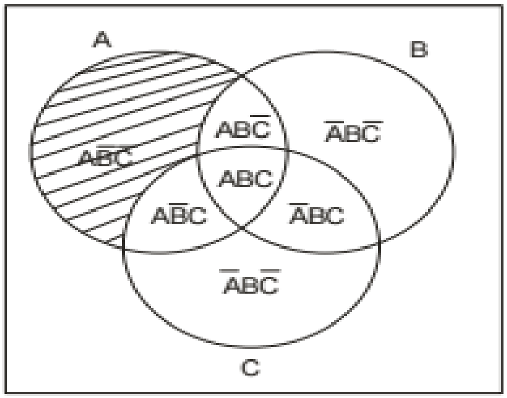
a) realizovan je događaj A, a nije događaj B – $\mathbf{A\bar{B}}$
b) realizovan je događaj B, a nije događaj A – $\mathbf{\bar{A}B}$
c) realizovana su oba događaja – **AB**

<u>PRIMER 10</u>:

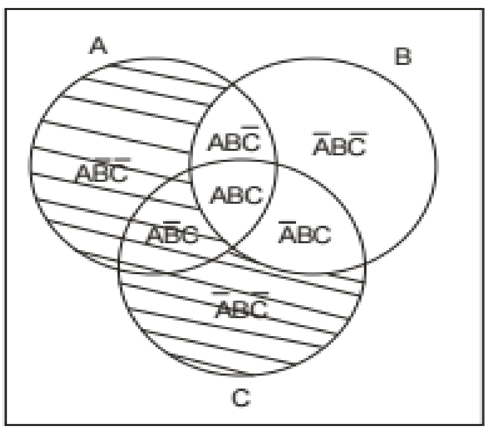
Data su tri događaja A, B i C. Pomoću simboličkih operacija sa datim događajima odrediti sledeće događaje:

a) *realizovan je događaj A, a nisu događaji B i C*
b) *realizovani su događaji A i C, a nije događaj B*
c) *realizovana su sva tri događaja*
d) *realizovan je jedan i samo jedan od ova tri događaja.*

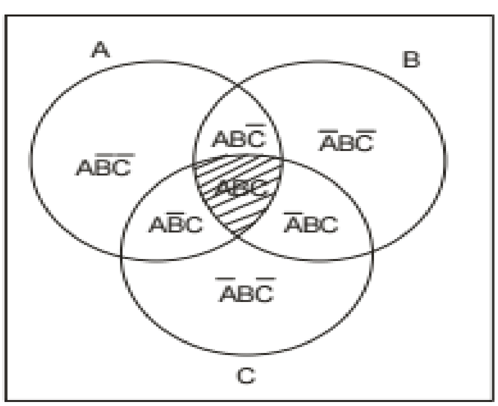
a) realizovan je događaj A, a nisu realizovani događaji B i C $-\ \mathbf{A\bar{B}\bar{C}}$



b) realizovani su događaji A i C, a nije realizovan događaj B $-\ \boldsymbol{A}\mathbf{\bar{B}C}$

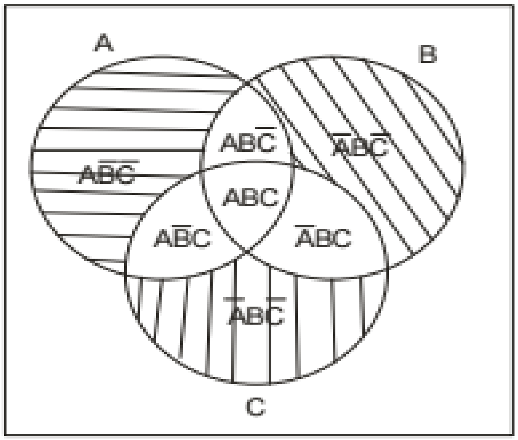


c) realizovana su sva tri događaja $-\ \boldsymbol{A}\mathbf{BC}$



d) realizovan je jedan i samo jedan od ova tri događaja –

$\boldsymbol{A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C}$



<u>PRIMER 11</u>:

Četiri studenta: Aca, Bojan, Darko i Marko polažu ispit. Ako se sa A, B, D i M označe njihovi uspesi na ispitu, izraziti sledeće događaje:

a) E – „nijedan nije položio“
$E = \overline{A}\overline{B}\overline{D}\overline{M}$

b) F – „položila su dva studenta“
$F = AB\overline{D}\overline{M} + A\overline{B}D\overline{M} + A\overline{B}\overline{D}M + \overline{A}BD\overline{M} + \overline{A}B\overline{D}M + \overline{A}\overline{B}DM$

c) G – „položio je samo Bojan“
$G = \overline{A}BDM$

d) H – „položili su svi“
$H = ABDM$

e) I – „položio je makar jedan od njih“
$I = A \cup B \cup D \cup M$

<u>PRIMER 12</u>:

Bacaju se istovremeno novčić i numerisana kocka, pri čemu se registruje pojava pisma i grba na novčiću, kao i pojava broja na gornjoj strani kocke.

Opisati skup ishoda.

Ω = {(P, 1), (P, 2), (P, 3), (P, 4), (P, 5), (P, 6),
(G, 1), (G, 2), (G, 3), (G, 4), (G, 5), (G, 6)}

<u>PRIMER 13</u>:

U kutiji su 4 cedulje numerisane brojevima 1, 2, 3, 4. Na slučajan način se iz kutije izvlači jedna po jedna cedulja bez vraćanja i to sve dok se ne izvuče cedulja na kojoj je neparan broj.

Opisati prostor ishoda.

Ω = {1, 3, 21, 23, 41, 43, 241, 243, 421, 423}

<u>PRIMER 14</u>:

Baca se kocka i registruje broj koji se pojavi na gornjoj strani kocke. Neka je:

- *događaj A: „pada broj manji od 3“*
- *događaj B: „pada broj manji od 5“*

Opisati prostor (skup) ishoda, kao i događaje A i B.

Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
A = {1, 2}
B = {1, 2, 3, 4}

PRIMER 15:

Iz skupa X = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} se na slučajan način bira jedan broj. Neka je Ω = X skup elementarnih događaja, tako da je $i \in \Omega$ *događaj „iz skupa X je izabrani broj i ".*

Za događaje:
A – „izabrani broj je manji od 7"
B – „izabrani broj je veći ili jednak sa 6"
C – „izabrani broj je paran"
D – „izabrani broj je neparan"

navesti od kojih elementarnih događaja se sastoje: AB, A(B ∪ D), $\overline{A}B$, $\overline{A}C$, $\overline{A \cup D}$, $\overline{A \cup B \cup C}$, ABC, ABCD.

A = {2, 3, 4, 5, 6}
B = {6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
C = {2, 4, 6, 8, 10, 12}
D = {3, 5, 7, 9, 11}

AB = A ∩ B = {2, 3, 4, 5, 6} ∩ {6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} = {6}

A(B ∪ D) = A ∩ ({6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} ∪ {3, 5, 7, 9, 11}) = {2, 3, 4, 5, 6} ∩ {3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} = {3, 5, 6}

$\overline{A}B = \overline{A} \cap B$ = {7, 8, 9, 10, 11, 12} ∩ {6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} = {7, 8, 9, 10, 11, 12}

$\overline{A}C = \overline{A} \cap C$ = {7, 8, 9, 10, 11, 12} ∩ {2, 4, 6, 8, 10, 12} = {8, 10, 12}

$\overline{A \cup D} = \overline{\{2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{3, 5, 7, 9, 11\}} = \overline{\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}}$ = {8, 10, 12}

$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{\{2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}}$ = {∅} = $\overline{\Omega}$

ABC = A ∪ B ∪ C $= \{2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ ∪ {2, 4, 6, 8, 10, 12} = {6}

ABCD = {6} ∪ D = {6} ∪ {3, 5, 7, 9, 11} = ∅ - nemoguć događaj

1.3. Klasična definicija verovatnoće

Klasičnu definiciju verovatnoće (*a priori definicija*) dao je *P. Laplas* (1749–1827), francuski matematičar i astronom.

Definicija se odnosi samo na one slučajne eksperimente kod kojih je skup elementarnih događaja konačan, a događaji su jednako verovatni.

Tipičan primer je bacanje novčića. Skup elementarnih događaja je konačan skup {grb, pismo}, a oba događaja su jednako verovatna, jer su obe opcije ravnopravne.

Neka skup Ω sadrži ***n*** elementarnih događaja koji su disjunktni i jednako mogući. Ako je ***m*** *(0* $\leq m \leq n$*)* broj svih povoljnih ishoda događaja A, onda je verovatnoća P(A) jednaka:

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{m}{n}} \qquad (1)$$

1.3.1. Osobine verovatnoće

1. $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$
2. $\mathbf{P(\emptyset) = 0}$
3. $\mathbf{P(\overline{A}) + P(\overline{B}) = 1}$
4. $\mathbf{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)}$
5. $\mathbf{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)}$
6. $\mathbf{P(A - B) = P(A) - P(A \cdot B)}$
7. $\mathbf{P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}}$

PRIMER 16:

Kolika je verovatnoća događaja A da prilikom bacanja novčića padne grb?

$\Omega = \{P, G\}$ n = 2 – ukupan broj ishoda
A = {G} m = 1 – povoljan broj ishoda

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2} = 0.5 \;\; \rightarrow 50\ \%$$

PRIMER 17:

Kolika je verovatnoća događaja A da se prilikom bacanja kockice pojavi paran broj?

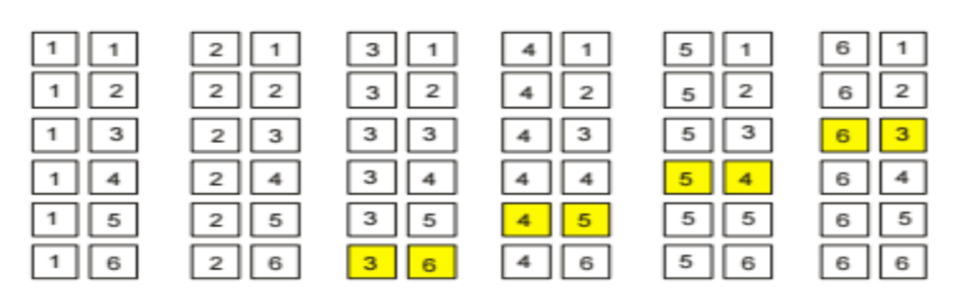
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ n = 6
A = {2, 4, 6} m = 3

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 \;\; \rightarrow 50\ \%$$

PRIMER 18:

Kolika je verovatnoća da će se na dvema bačenim kockicama pojaviti zbir 9?

A: „pao je zbir 9“



$n = 6^2 = 36$

A = {(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)}   m = 4

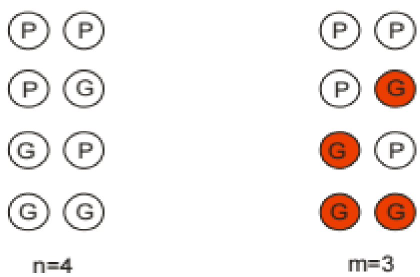
$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0.11 \quad \rightarrow 11{,}11\ \%$$

<u>PRIMER 19</u>:

Kolika je verovatnoća da pri bacanju 2 novčića padne bar jedan grb?

A: „pao je bar jedan grb“

<u>I način</u>:

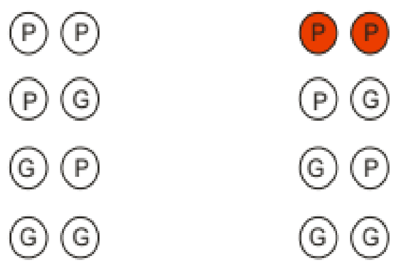


A = {PG, GP, GG}

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4} = 0.75 \quad \rightarrow 75\ \%$$

<u>II način</u>:

$\overline{A}$: „nije pao nijedan grb“ (odnosno pala su 2 pisma)



n=4 m=1

$$\overline{A} = \{PP\}$$

$$P(\overline{A}) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4}$$

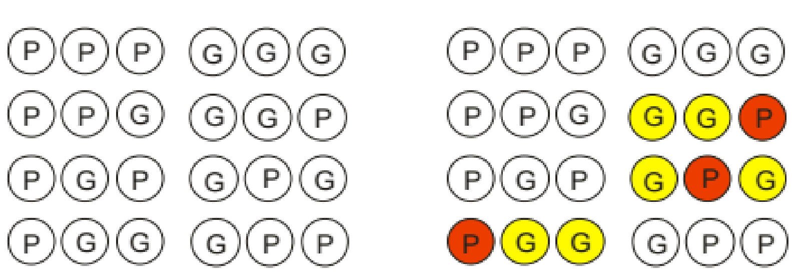
$$\mathbf{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75 \ \rightarrow \ 75\ \%$$

<u>PRIMER 20</u>:

Odrediti verovatnoću da pri istovremenom bacanju 3 novčića padne tačno jedno pismo.

A: „palo je tačno jedno pismo“



n=8 m=3

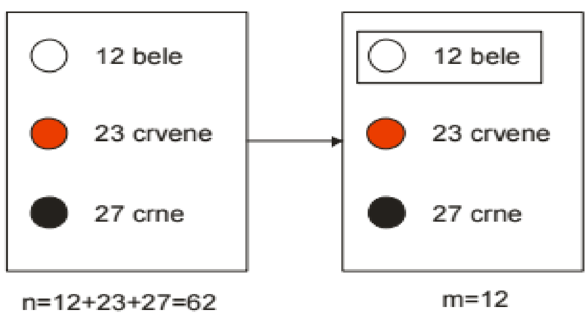
$A = \{PGG, GGP, GPG\}$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{8} = 0.375 \quad \rightarrow 37{,}5\ \%$$

PRIMER 21:

U posudi se nalazi 12 belih, 23 crvene i 27 crnih kuglica. Odrediti verovatnoću da izvučemo belu kuglicu pod uslovom da su sve mogućnosti podjedanko verovatne.

A: „izvučena je bela kuglica“



$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{12}{62} = 0.1935 \quad \rightarrow 19{,}35\ \%$$

PRIMER 22:

Nepismeno dete sastavlja reči od sledećih 10 slova: a, a, a, e, i, k, m, m, t, t. Odrediti verovatnoću da će sastaviti reč „matematika“.

A = „sastavljena je reč matematika“

Broj svih mogućih ishoda (permutacija bez ponavljanja):

$$\boldsymbol{P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} \qquad (2)$$

Broj svih mogućih ishoda (permutacija sa ponavljanjem):

$$\boldsymbol{P_n = \frac{n!}{l_1! \cdot l_2! \cdot \ldots \cdot l_k!}} \qquad (3)$$

Broj svih mogućih ishoda je ustvari broj svih permutacija od ovih 10 slova, ali sa ponavljanjem, jer se slovo $\boldsymbol{a}$ pojavljuje 3 puta, slovo $\boldsymbol{m}$ 2 puta i slovo $\boldsymbol{t}$ 2 puta.

$$P_n = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 151.200 = n$$

Od svih mogućnosti, povoljna je samo jedna (reč „matematika“), pa je *m = 1.*

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} = \frac{1}{151.200} = 0.00000137566 \rightarrow 0{,}00066\ \%$$

<u>PRIMER 23</u>:

Kocka čije su sve površine obojene, izdeljena je na hiljadu kockica jednakih dimenzija. Tako dobijene kockice su izmešane. Odrediti verovatnoću da će nasumice izabrana kocka imati 2 obojene površine.

A: „izvučena je kockica sa 2 obojene površine“

<u>n = 1.000</u>

Kocka ima 12 ivica, a svaka ivica sadrži po 10 kockica; kockice na uglovima imaju sve 3 obojene površine.

Za svaku ivicu – po 8 kockica sa 2 obojene površine $\underline{m = 12 \cdot 8 = 96}$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{96}{1.000} = 0.096 \quad \rightarrow 9{,}6\ \%$$

PRIMER 24:

U posudi se nalazi 12 belih, 13 crvenih i 14 plavih kuglica. Kolika je verovatnoća da izvučemo plavu kuglicu pod uslovom da su sve mogućnosti jednako verovatne?

A = „izvučena je plava kuglica“

m = 14
n = 12 +13 +14 = 39

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{14}{39} = 0.3589 \quad \rightarrow 35{,}89\ \%$$

PRIMER 25:

Ako se kocka baci jednom, kolika je verovatnoća da se pojavi broj koji je manji od 5?

A: „pojava broja koji je manji od 5“

A = {1, 2, 3, 4}

m = 4, n = 6

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{6} = 0.6667 \quad \rightarrow 66{,}67\ \%$$

PRIMER 26:

Kuglica je izvučena iz kutije u kojoj se nalaze 4 bele, 3 crvene i 4 plave kuglice.

Odrediti verovatnoću da izvučena kuglica:

a) *bude bela*
b) *bude bela ili crvena*
c) *nije crvena.*

a)

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{11} = 0.3636 \quad \rightarrow 36{,}36\ \%$$

b)

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4+3}{11} = \frac{7}{11} = 0.63636 \quad \rightarrow 63{,}64\ \%$$

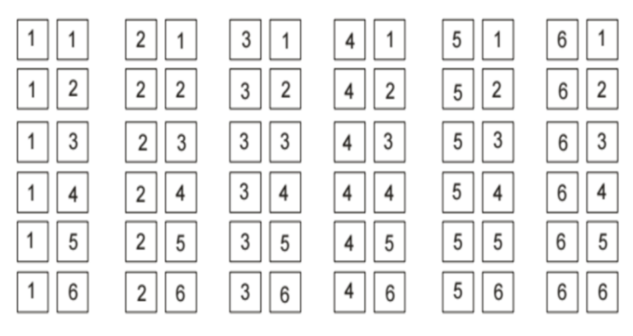
c)

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4+4}{11} = \frac{8}{11} = 0.72727 \quad \rightarrow 72{,}73\ \%$$

PRIMER 27:

Izračunati verovatnoću da pri bacanju 2 kockice zbir brojeva bude manji od 10.

A: „pao je zbir manji od 10“



(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6)
(2, 1) **(2, 2)** (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6)
(3, 1) (3, 2) **(3, 3)** (3, 4) (3, 5) (3, 6)
(4, 1) (4, 2) (4, 3) **(4, 4)** (4, 5)
(5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4)
(6, 1) (6, 2) (6, 3)

n = 36 mogućih ishoda m = 30 povoljnih ishoda

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{30}{36} = 0.8333 \quad \rightarrow 83{,}33\ \%$$

<u>PRIMER 28</u>:

Meta se sastoji iz 3 zone čija je verovatnoća pogađanja redom 0.15, 0.25 i 0.35. Koja je verovatnoća da se pri gađanju meta promaši?

P(A) = 0.15 + 0.25 + 0.35 = 0.75

$P(\bar{A}) = 1 – P(A)$

$P(\bar{A}) = 1 – 0.75 = 0.25 \rightarrow 25\%$

<u>PRIMER 29</u>:

Bacaju se dve numerisane kocke. Odrediti verovatnoću događaja:

- *A: „pao je zbir 8“*
- *B: „pao je proizvod 8“*

<u>n = 36</u>

A = {(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)} <u>m = 5</u>

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{36} = 0.13888 \rightarrow 13{,}89\ \%$$

B = {(2, 4), (4, 2)} m = 2

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{2}{36} = 0.05555 \rightarrow 5{,}56\ \%$$

PRIMER 30:

Šta će se verovatnije dobiti pri bacanju 2 kocke: zbir 11 ili zbir 12?

n = 36

A: „dobijen je zbir 11“
A = {(5, 6), (6, 5)} m = 2

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{36} = 0.0555 \rightarrow 5{,}56\ \%$$

B: „dobijen je zbir 12“
B = {(6, 6)} m = 1

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{36} = 0.02777 \rightarrow 2{,}78\ \%$$

2. USLOVNA VEROVATNOĆA I NEZAVISNOST

2.1. Uslovna verovatnoća

Verovatnoća događaja A, pod uslovom da se događaj B već realizovao ili se pretpostavlja da će se realizovati, naziva se **uslovna verovatnoća**.

Prema tome, verovatnoća **P(A|B)** naziva se uslovna verovatnoća događaja A, pod uslovom da se događaj B realizovao i izračunava se kao:

$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}} \tag{4}$$

Verovatnoća **P(B|A)** predstavlja uslovnu verovatnoću događaja B, pod uslovom da se događaj A realizovao i izračunava se kao:

$$\boldsymbol{P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}} \tag{5}$$

2.2. Verovatnoća zbira dva događaja

Zbir događaja A i B je događaj $\mathbf{A+B}$, odnosno $\mathbf{A \cup B}$, koji se realizuje ukoliko dođe do realizacije bar jednog od njih ili i jednog i drugog događaja.

Ako su događaji A i B **nezavisni** onda je verovatnoća njihovog zbira:

$$\boldsymbol{P(A+B) = P(A) + P(B)} \tag{6}$$

a ukoliko su događaji A i B **zavisni**, odnosno mogu nastupiti istovremeno, onda je:

$$\boldsymbol{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)} \tag{7}$$

2.3. Verovatnoća proizvoda dva događaja

Proizvod događaja A i B je događaj **AB**, odnosno **A ∩ B**, koji se realizuje ukoliko se realizuju i događaj A i događaj B.

Ako su događaji A i B **nezavisni** onda je verovatnoća njihovog proizvoda:

$$\boldsymbol{P(AB) = P(A) \cdot P(B)} \tag{8}$$

a ukoliko su događaji A i B **zavisni** onda je:

$$\boldsymbol{P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)} \tag{9}$$

2.4. Verovatnoća zbira i proizvoda tri zavisna događaja

Za tri zavisna događaja A, B i C formule su sledeće:

$$\boldsymbol{P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{P(ABC) = P(A)\, P(B|A)\, P(C|AB)} \tag{11}$$

<u>PRIMER 31</u>:

Kolika je verovatnoća da će se na kocki prilikom bacanja pojaviti paran broj, pod uslovom da je taj broj manji od 4?

A: „pojava parnog broja“ A = {2, 4, 6}
B: „pojava broja manjeg od 4“ B = {1, 2, 3} <u>m = 3</u>

P(A|B) = ?

AB = A ∩ B = {2, 4, 6} ∩ {1, 2, 3} = {2} <u>m = 1</u>

$$\mathrm{P(AB)} = \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{P(B)} = \frac{3}{6}$$

$$\mathrm{P(A|B)} = \frac{\mathrm{P(AB)}}{\mathrm{P(B)}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3} = 0.333 \quad \rightarrow \quad 33{,}33\ \%$$

<u>PRIMER 32</u>:

U kesi se nalazi 5 belih i 9 crnih kuglica. Izvlačimo nasumice 2 kuglice, jednu po jednu, bez vraćanja. Kolika je verovatnoća da ćemo iz drugog puta izvući crnu, ako znamo da je prvo izvučena bela kuglica?

A: „izvučena je crna kuglica“
B: „izvučena je bela kuglica iz prvog puta“

$$\mathrm{P(AB)} = \mathrm{P(A)}\ \mathrm{P(B)} = \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{45}{182}$$

$$\mathrm{P(B)} = \frac{5}{14}$$

$$\mathrm{P(A|B)} = \frac{\mathrm{P(AB)}}{\mathrm{P(B)}} = \frac{\frac{45}{182}}{\frac{5}{14}} = \frac{9}{13} = 0.6923 \quad \rightarrow \quad 69{,}23\ \%$$

PRIMER 33:

Dinar se baca ili do pojave grba ili do tri uzastopne pojave pisma. Pod uslovom da je rezultat prvog bacanja pismo, naći verovatnoću da dinar bude bačen 3 puta.

Prilikom bacanja novčića mogući ishodi su: {G, PG, PPG, PPP}

$$\mathrm{P(G)} = \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{P(PG)} = \frac{1}{4}, \qquad \mathrm{P(PPG)} = \frac{1}{8}, \qquad \mathrm{P(PPP)} = \frac{1}{8}$$

A: „dinar se baca 3 puta“

$$\mathrm{A} = (\mathrm{PPG} + \mathrm{PPP})$$
$$\mathrm{P(A)} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

B: „pojava pisma u prvom bacanju“

$$\mathrm{B} = (\mathrm{PG} + \mathrm{PPG} + \mathrm{PPP})$$
$$\mathrm{P(B)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

Kako je AB = A i $\mathrm{P(A)} = \frac{1}{4}$, onda je:

$$\mathrm{P(A|B)} = \frac{\mathrm{P(AB)}}{\mathrm{P(B)}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = 0.5 \quad \rightarrow \quad 50\ \%$$

PRIMER 34:

Odrediti verovatnoću da iz 32 karte za igru izvučemo ili kralja ili asa?

A: „izvučena karta je kralj“
B: „izvučena karta je as“

$$\mathrm{P(A)} = \frac{4}{32}$$

$$P(B) = \frac{4}{32}$$

Događaji su <u>nezavisni</u> (ne postoji mogućnost da se dogode istovremeno), pa je prema tome:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{32} + \frac{4}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 0.25 \quad \rightarrow \quad 25\ \%$$

<u>PRIMER 35</u>:

Odrediti verovatnoću da od 32 karte za igru izvučemo ili karo (kocka) ili asa?

A: „izvučena karta je karo“
B: „izvučena karta je as“

$$P(A) = \frac{8}{32}$$
$$P(B) = \frac{4}{32}$$

Događaji su <u>zavisni</u> (postoji mogućnost da se dogode istovremeno) – as karo (AB), pa je prema tome:

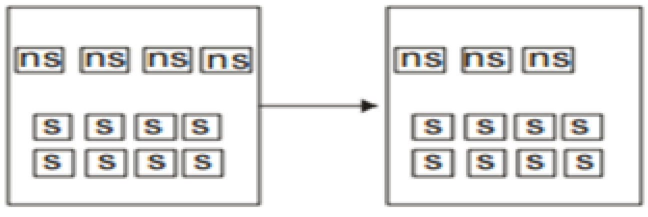
$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32} = 0.3437 \rightarrow \ 34{,}38\ \%$$

<u>PRIMER 36</u>:

U kontejneru se nalazi 12 proizvoda, od kojih je 8 standardnih. Radnik bira nasumice 2 proizvoda, prvo jedan, pa drugi. Odrediti verovatnoću da su oba proizvoda nestandardna.

P(AB) = P(A) P(B|A) = ?

A: „izvučen je nestandardan proizvod u 1. izvlačenju“
B|A: „izvučen je nestandardan proizvod u 2. izvlačenju, pod uslovom da je u 1. izvlačenju izvučen nestandardan proizvod“



8 standardnih 8 standardnih
4 nestandardna 3 nestandardna

U kontejneru je ukupno 12 proizvoda, pa je verovatnoća izvlačenja nestandardnog proizvoda u prvom izvlačenju:

$$P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

U drugom izvlačenju opet se teži izvlačenju nestandardnog proizvoda, ali je sada u kontejneru ostalo 11 proizvoda, od kojih je 3 nestandardno:

$$P(B|A) = \frac{3}{11}$$

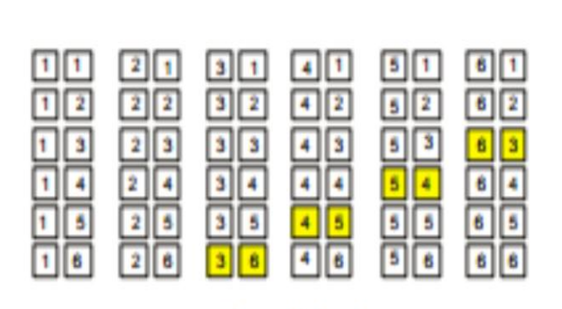
$$P(AB) = P(A)\ P(B|A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{11} = \frac{3}{33} = \frac{1}{11} = 0.09090 \quad \rightarrow 9{,}09\ \%$$

<u>PRIMER 37</u>:

Kolika je verovatnoća da će se na dvema bačenim kockama dobiti zbir 9 ili, ako se to ne dogodi, da se pri ponovljenom bacanju dobije zbir 7?

A: „pao je zbir 9“ $\rightarrow$ $\bar{A}$: „nije pao zbir 9“
B: „pao je zbir 7 “

Traženi događaj je zbir dva događaja: $\mathbf{A + \bar{A}B}$



$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \qquad P(\overline{A}) = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(\overline{A}B) = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{8}{54} = \frac{4}{27}$$

$$P(A + \overline{A}B) = \frac{1}{9} + \frac{4}{27} = \frac{7}{27} = 0.25925 \quad \rightarrow \quad 25{,}93\ \%$$

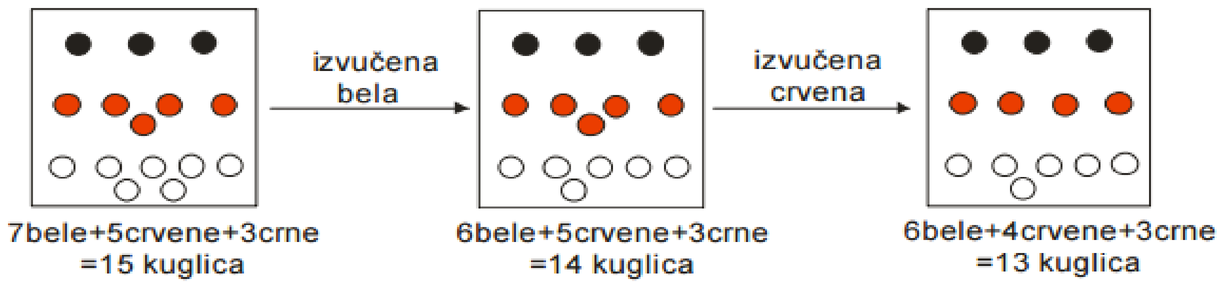
<u>PRIMER 38</u>:

U kutiji se nalazi 7 belih, 5 crvenih i 3 crne kuglice. Slučajno se izvlače 3 kuglice, jedna za drugom. Naći verovatnoću da je prva izvučena kuglica bela, druga crvena i treća crna.

A: „prva izvučena kuglica je bele boje“
B: „druga izvučena kuglica je crvene boje“
C: „treća izvučena kuglica je crne boje“

Moraju se opisati i događaji:

B|A: „druga izvučena kuglica je crvena pod uslovom da je prva izvučena kuglica bela“
C|AB: „treća izvučena kuglica je crna, pod uslovom da je prva izvučena kuglica bela i druga crvena“



$P(A) = \frac{7}{15}$ $\quad P(B|A) = \frac{5}{14}$ $\quad P(C|AB) = \frac{3}{13}$

$\mathbf{P(ABC) = P(A)\ P(B|A)\ P(C|AB)}$

$$P(ABC) = \frac{7}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{3}{13} = \frac{105}{2.730} = 0.03846 \quad \rightarrow 3{,}85\ \%$$

<u>PRIMER 39</u>:

U nekom gradu 40% stanovnika ima plavu kosu, 25% ima plave oči, a 15% ima i plavu kosu i plave oči.

Biramo nasumice jednog stanovnika.

a) *Ako on ima plavu kosu, kolika je verovatnoća da će imati i plave oči?*
b) *Ako on ima plave oči, kolika je verovatnoća da neće imati plavu kosu?*
c) *Kolika je verovatnoća da on neće imati ni plave oči ni plavu kosu?*

A: „izabrani građanin ima plave oči“
B: „izabrani građanin ima plavu kosu“

$$P(A) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \qquad P(B) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} \qquad P(AB) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$$

a) Ako on ima plavu kosu, kolika je verovatnoća da će imati i plave oči?

Ovde se radi o uslovnoj verovatnoći, pa je traženi događaj **P(A|B)**.

$$\mathrm{P(AB) = P(B)\ P(A|B)} \quad \rightarrow \quad \mathbf{P(A|B)} = \frac{\mathbf{P(AB)}}{\mathbf{P(B)}}$$

$$\mathrm{P(A|B)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{2}{5}} = \frac{15}{40} = 0.375 \quad \rightarrow \quad 37{,}5\ \%$$

b) Ako on ima plave oči, kolika je verovatnoća da neće imati plavu kosu?

Lakše je ukoliko se ide preko verovatnoće suprotnog događaja, pa je traženi događaj $\mathbf{P(\overline{B}|A)}$.

$$\mathrm{P(AB) = P(A)\ P(B|A)} \quad \rightarrow \quad \mathbf{P(B|A)} = \frac{\mathbf{P(AB)}}{\mathbf{P(A)}}$$

$$\mathrm{P(B|A)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{4}} = \frac{12}{20} = 0.6$$

$$\mathbf{P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A)} = 1 - 0.6 = 0.4 \quad \rightarrow \quad 40\ \%$$

c) Kolika je verovatnoća da neće imati ni plave oči ni plavu kosu?

Ponovo je lakše ukoliko se ide preko verovatnoće suprotnog događaja.
Radi se o zavisnim događajima, pa je traženi događaj $\mathbf{P(\overline{A + B})}$.

$$\mathbf{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)}$$

$$\mathrm{P(A + B)} = \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{3}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{P(\overline{A + B}) = 1 - P(A + B)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5 \quad \rightarrow \quad 50\ \%$$

3. TOTALNA VEROVATNOĆA

Neka nezavisni događaji $\boldsymbol{H_1}$**,** $\boldsymbol{H_2}$**, ... ,** $\boldsymbol{H_n}$ čine **skup događaja Ω**, odnosno **potpuni sistem hipoteza** ($\Omega = H_1 + H_2 + ... + H_n$), gde su verovatnoće $\boldsymbol{P(H_k)}$ unapred poznate.

Neka se neki proizvoljni događaj A ostvaruje uz realizaciju bar jednog od ovih događaja (hipoteza). Da bi se odredila verovatnoća događaja A, potrebno je naći ***uslovne verovatnoće*** $\boldsymbol{P(A|H_k)}$, tj. verovatnoće realizacije pojedinačnih hipoteza koje su dovele do ostvarivanja događaja A.

Verovatnoća događaja A računa se po sledećoj formuli:

$$\boldsymbol{P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)\ P(A|H_k)} \qquad (12)$$

odnosno

$$\boldsymbol{P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \cdots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)} \qquad (13)$$

Ovakva jednakost poznata je pod nazivom **teorema o totalnoj verovatnoći**.

PRIMER 40:

Na ispit iz matematike izašlo je 60% studenata koji polažu prvi put i 40% ostalih. Verovatnoća da će student koji polaže prvi put položiti ispit je 0.3, a za ostale 0.4. Odrediti verovatnoću da će slučajno izabrani student položiti ispit.

Neka su H_1 i H_2 verovatnoće da:

H_1 – „student polaže prvi put ispit“ → $P(H_1) = 0.6$
H_2 – „student polaže ispit više puta“ → $P(H_2) = 0.4$

A: „student će položiti ispit“

Verovatnoća da će student položiti iz prvog puta je: $P(A|H_1) = 0.3$
Verovatnoća da će student položiti iz više puta je: $P(A|H_2) = 0.4$

$$\mathbf{P(A) = P(H_1)\, P(A|H_1) + P(H_2)\, P(A|H_2)}$$

$$P(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}34 \quad \rightarrow \quad 34\ \%$$

<u>PRIMER 41</u>:

U nekoj fabrici 30% proizvodnje otpada na prvu mašinu, 25% na drugu mašinu i ostalo na treću mašinu. Na prvoj mašini pojavljuje se 1% škarta, na drugoj 1,2% i na trećoj 2% škarta. Kolika je verovatnoća da će slučajno izabrani proizvod biti škart?

A : „slučajno izabrani proizvod je škart“

H_1 – „proizvod je izrađen na prvoj mašini“ → $P(H_1) = 0.30$
H_2 – „proizvod je izrađen na drugoj mašini“ → $P(H_2) = 0.25$
H_3 – „proizvod je izrađen na trećoj mašini“ → $P(H_3) = 0.45$

Iz uslova u zadatku imamo da je:

Verovatnoća da je slučajno izabrani proizvod koji je škart izrađen na prvoj mašini:
$P(A|H_1) = 0.01$

Verovatnoća da je slučajno izabrani proizvod koji je škart izrađen na drugoj mašini:
$P(A|H_2) = 0.012$

Verovatnoća da je slučajno izabrani proizvod koji je škart izrađen na trećoj mašini:
$P(A|H_3) = 0.02$

$$\mathbf{P(A) = P(H_1)\, P(A|H_1) + P(H_2)\, P(A|H_2) + P(H_3)\, P(A|H_3)}$$

$$P(A) = 0{,}3 \cdot 0{,}01 + 0{,}25 \cdot 0{,}012 + 0{,}45 \cdot 0{,}02 = 0{,}015 \quad \rightarrow \quad 1{,}5\ \%$$

<u>PRIMER 42</u>:

Određeni artikal proizvode 3 fabrike. Poznato je da prva fabrika proizvodi 2 puta više od druge, a druga i treća isto. Takođe, 2% proizvoda iz prve i druge fabrike je defektno, a 4% iz treće. Svi proizvodi se nalaze na istom skladištu. Slučajno se bira 1 proizvod. Kolika je verovatnoća da je on defektan?

A : „slučajno izabrani proizvod je defektan“

H_1 – „proizvod je izrađen u prvoj fabrici“ $\rightarrow$ $P(H_1) = 0.30$
H_2 – „proizvod je izrađen u drugoj fabrici“ $\rightarrow$ $P(H_2) = 0.25$
H_3 – „proizvod je izrađen u trećoj fabrici“ $\rightarrow$ $P(H_3) = 0.45$

Iz uslova u zadataku imamo da je:

$P(H_1) = 2\,P(H_2) \quad \rightarrow \quad \mathrm{P(H_1)} = \frac{1}{2}$

$P(H_2) = P(H_3) \quad \rightarrow \quad P(\mathrm{H_2}) = \mathrm{P(H_3)} = \frac{1}{4}$

$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$

$\mathrm{P(A|H_1) = P(A|H_2) = 0.02}$

$\mathrm{P(A|H_3) = 0.04}$

$$\mathbf{P(A) = P(H_1)\,P(A|H_1) + P(H_2)\,P(A|H_2) + P(H_3)\,P(A|H_3)}$$

$$\mathrm{P(A)} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}02 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}04 = 0{,}025 \quad \rightarrow \quad 2{,}5\ \%$$

<u>PRIMER 43</u>:

Dva različita proizvoda, jedan iz jedne, drugi iz druge fabrike, nalaze se u različitim kontejnerima.

Ako je verovatnoća da su proizvodi iz prvog kontejnera ispravni 0.9, a iz drugog 0.8, odrediti verovatnoću da se, nasumice birajući kontejnere, izvuče ispravan proizvod.

A: „izvučen je ispravan proizvod“

H_1 – „izabran je prvi kontejner“
H_2 – „izabran je drugi kontejner“

$A|H_1$ – „izvučen je ispravan proizvod, ako je izabran prvi kontejner“
$A|H_2$ – „izvučen je ispravan proizvod, ako je izabran drugi kontejner“

Kako ima 2 kontejnera, verovatnoća da se izabere svaki od njih je $\frac{1}{2}$, pa je:

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$P(A|H_1) = 0.9$$

$$P(A|H_2) = 0.8$$

$$\mathbf{P(A) = P(H_1)\, P(A|H_1) + P(H_2)\, P(A|H_2)}$$

$$P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}85 \quad \rightarrow \quad 85\ \%$$

<u>PRIMER 44</u>:

U prodavnicu automobilskih delova stigli su akumulatori proizvedeni u 4 različite fabrike, i to:

- *500 akumulatora iz I fabrike,*
- *1.050 akumulatora iz II fabrike,*
- *550 akumulatora iz III fabrike,*
- *1.900 akumulatora iz IV fabrike.*

Verovatnoća da akumulator traje više od 5 godina je:

- *za I fabriku 0.20,*
- *za II fabriku 0.25,*
- *za III fabriku 0.30,*
- *za IV fabriku 0.10.*

Slučajno se bira jedan akumulator. Odrediti verovatnoću da će trajati duže od 5 godina.

A: „izabrani akumulator će trajati duže od 5 godina“

Najpre je neophodno odrediti ukupan broj akumulatora, iz sve četiri fabrike:
500+1.050+550+1.900 = 4.000

H_1 – „izabrani akumulator je iz I fabrike“

$$P(H_1) = \frac{500}{4.000} = 0.125$$

H_2 – „izabrani akumulator je iz II fabrike“

$$P(H_2) = \frac{1.050}{4.000} = 0.2625$$

H_3 – „izabrani akumulator je iz III fabrike“

$$P(H_3) = \frac{550}{4.000} = 0.1375$$

H_4 – „izabrani akumulator je iz IV fabrike“

$$P(H_4) = \frac{1.900}{4.000} = 0.475$$

$P(A|H_1) = 0.20$
$P(A|H_2) = 0.25$
$P(A|H_3) = 0.30$
$P(A|H_4) = 0.10$

$$\mathbf{P(A) = P(H_1)\,P(A|H_1) + P(H_2)\,P(A|H_2) + P(H_3)\,P(A|H_3) + P(H_4)\,P(A|H_4)}$$

$$P(A) = 0{,}125 \cdot 0{,}20 + 0{,}265 \cdot 0{,}25 + 0{,}1375 \cdot 0{,}30 + 0{,}475 \cdot 0{,}10 == 0{,}17937$$
$$\rightarrow \quad 17{,}94\ \%$$

4. BAYES-OVA FORMULA

Bayes-ova formula se vezuje za totalnu verovatnoću. Međutim, na osnovu formule totalne verovatnoće nije moguće u prethodnom primeru dati odgovor na pitanje iz koje fabrike potiče izabrani proizvod. Odgovor na ovo pitanje daje **Bayes-ova formula**.

Neka je izvršen eksperiment i neka se kao ishod tog eksperimenta ostvario događaj A. Često je interesantno u kojem je uslovu $\boldsymbol{H_i}$ nastupio događaj A. To su ocene verovatnoće događaja $\boldsymbol{H_i|A}$ gde je $i = 1, 2, ..., n$.

Ako događaji $H_1, H_2, ..., H_n$ čine potpuni sistem hipoteza u odnosu na događaj A i ako je $P(A) > 0$, onda je:

$$\boldsymbol{P(H_i|A) = \frac{P(H_i)\, P(A|H_i)}{P(A)}} \tag{14}$$

Bayes-ova formula se naziva i ***formula verovatnoća hipoteza (uzroka)***, jer se na događaje $H_1, H_2, ..., H_n$ gleda kao na različite uzroke koji mogu dovesti do realizacije događaja A.

PRIMER 45:

Baca se kocka. Ako se na kocki pojavi 1 ili 6, uzima se kuglica iz prve kutije, u suprotnom se uzima iz druge kutije. Prva kutija sadrži 4 crne, 2 bele i 1 zelenu kuglicu, a druga kutija sadrži 4 bele i 3 zelene kuglice.

a) *Naći verovatnoću da je izvučena bela kuglica.*
b) *Naći verovatnoću da je izvučena iz prve kutije, ako znamo da je bela.*

a) Verovatnoća da je izvučena bela kuglica.

A: „izvučena je bela kuglica“

H_1 – „izabrana je prva kutija“

$$P(H_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

H_2 – „izabrana je druga kutija“

$$P(H_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(A|H_1) = \frac{2}{7}$$

$$P(A|H_2) = \frac{4}{7}$$

$$\mathbf{P(A) = P(H_1)\ P(A|H_1) + P(H_2)\ P(A|H_2)}$$

$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7} + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{7} = \frac{10}{21} = 0.47619 \quad \rightarrow \ 47{,}62\ \%$$

b) Verovatnoća da je bela kuglica izvučena iz prve kutije.

$$\mathbf{P(H_1|A) = \frac{P(H_1)\ P(A|H_1)}{P(A)}}$$

$$P(H_1|A) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}}{\frac{10}{21}} = \frac{\frac{2}{21}}{\frac{10}{21}} = \frac{1}{5} = 0.2 \ \rightarrow \ 20\ \%$$

PRIMER 46:

Prilikom eksplozije granata se raspada na parčad od tri težinske kategorije: krupna, srednja i mala, pri čemu ta parčad čine 0.1, 0.3 i 0.6 od ukupnog broja parčadi.

Prilikom udara u oklop, krupno parče ga probija sa verovatnoćom 0.9, srednje parče sa verovatnoćom 0.2, a malo sa verovatnoćom 0.05.

U momentu eksplozije na oklop je palo samo jedno parče i probilo ga. Naći verovatnoću da je oklop probijen krupnim, srednjim i malim parčetom.

A: „oklop je probijen“

H_1 – „krupnim parčetom“
$P(H_1) = 0{,}1$ i $P(A|H_1) = 0{,}9$

H_2 – „srednjim parčetom“
$P(H_2) = 0{,}3$ i $P(A|H_2) = 0{,}2$

H_3 – „malim parčetom“
$P(H_3) = 0{,}6$ i $P(A|H_3) = 0{,}05$

$$\mathbf{P(A) = P(H_1)\ P(A|H_1) + P(H_2)\ P(A|H_2) + P(H_3)\ P(A|H_3)}$$

$$P(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}05 = 0{,}18 \quad \rightarrow \quad 18\ \%$$

Sada uz pomoć Bayes-ove formule ispitujemo veerovatnoću da je oklop probijen krupnim, srednjim i malim parčetom.

- $P(H_1|A)$ – verovatnoća da je oklop probijen krupnim parčetom

$$\mathbf{P(H_1|A)} = \frac{\mathbf{P(H_1)\ P(A|H_1)}}{\mathbf{P(A)}} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{0{,}18} = 0.5 \quad \rightarrow \quad 50\ \%$$

- $P(H_2|A)$ – verovatnoća da je oklop probijen srednjim parčetom

$$\mathbf{P(H_2|A)} = \frac{\mathbf{P(H_2)\ P(A|H_2)}}{\mathbf{P(A)}} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}2}{0{,}18} = 0.333 \quad \rightarrow \quad 33{,}33\ \%$$

- $P(H_3|A)$ – verovatnoća da je oklop probijen malim parčetom

$$\mathbf{P(H_3|A)} = \frac{\mathbf{P(H_3)\ P(A|H_3)}}{\mathbf{P(A)}} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}05}{0{,}18} = 0.1666 \quad \rightarrow \quad 16{,}67\ \%$$

<u>PRIMER 47</u>:

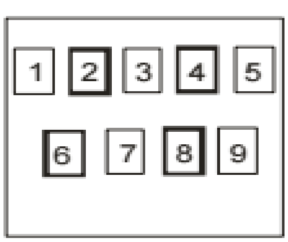
U kutiji S nalazi se 9 listića numerisanih brojevima od 1 do 9, a u kutiji B 5 listića numerisanih brojevima od 1 do 5.
Biramo kutiju nasumice i iz nje izvlačimo jedan listić. Ako je broj na listiću paran, izračunati kolika je verovatnoća da je listić izvađen iz kutije S.

A: „izvađen je paran broj“

H_1 – „izabrana je prva kutija (S)“
H_2 – „izabrana je druga kutija (B)“

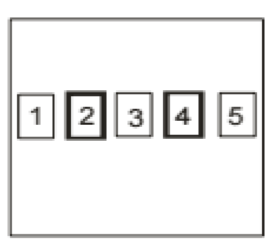
Imamo na raspolaganju 2 kutije od kojih biramo jednu, pa je:
$P(H_1) = \frac{1}{2}$ i $P(H_2) = \frac{1}{2}$

Kutija S



$P(A|H_1) = \frac{4}{9}$

Kutija B



$P(A|H_2) = \frac{2}{5}$

$$\mathbf{P(A) = P(H_1)\ P(A|H_1) + P(H_2)\ P(A|H_2)}$$

$$\mathrm{P(A)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{19}{45}=0.4222 \quad \rightarrow\ 42{,}22\ \%$$

Verovatnoća da ako je izvučen paran listić, da je on uzet iz kutije S, obeležava se sa $\mathbf{P(H_1|A)}$ i računa se kao:

$$\mathbf{P(H_1|A)} = \frac{\mathbf{P(H_1)\ P(A|H_1)}}{\mathbf{P(A)}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{19}{45}} = \frac{10}{19} = 0{,}5263 \quad \rightarrow \quad 52{,}63\ \%$$

<u>PRIMER 48</u>:

Dva strelca, nezavisno jedan od drugog, gađaju jednu metu ispaljujući po jedan metak. Verovatnoća da će prvi strelac pogoditi iznosi 0.8, a drugi 0.4. Nakon izvedenog gađanja konstatovan je jedan pogodak u metu. Naći verovatnoću da je pogodio prvi strelac.

A: „meta je pogođena sa jednim pogotkom“

H_1 – „prvi strelac je pogodio metu (drugi je promašio)“
H_2 – „drugi strelac je pogodio metu (prvi je promašio)“

- Verovatnoća da će prvi strelac pogoditi metu je 0.8 (tj. on promašuje sa verovatnoćom 0.2).
- Verovatnoća da će drugi strelac pogoditi metu je 0.4 (tj. on promašuje sa verovatnoćom 0.6).

Kako je meta pogođena samo jednom, to znači da je jedan od njih promašio. Zato je:

$P(H_1) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$ (tj. prvi je pogodio, a drugi promašio)
$P(H_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$ (tj. prvi je promašio, a drugi pogodio)

Najpre se koristi formula totalne verovatnoće:

$$\mathbf{P(A) = P(H_1)\ P(A|H_1) + P(H_2)\ P(A|H_2)}$$

$$\mathrm{P(A)} = 0{,}48 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1 = 0.56 \quad \rightarrow \ 56\ \%$$

Zatim se koristi Bayes-ova formula:

- $P(H_1|A)$ – verovatnoća da je metu pogodio prvi strelac

$$\mathbf{P(H_1|A)} = \frac{\mathbf{P(H_1)\ P(A|H_1)}}{\mathbf{P(A)}} = \frac{0{,}48 \cdot 1}{0{,}56} = 0.8571 \quad \rightarrow \quad 85{,}71\ \%$$

- $P(H_2|A)$ – verovatnoća da je metu pogodio drugi strelac

$$\mathbf{P(H_2|A)} = \frac{\mathbf{P(H_2)\ P(A|H_2)}}{\mathbf{P(A)}} = \frac{0{,}08 \cdot 1}{0{,}56} = 0.1428 \quad \rightarrow \quad 14{,}28\ \%$$

PRIMER 49:

U magacinu se nalaze proizvodi iste vrste, proizvedeni u tri različita pogona, 20%, 40% i 40%, respektivno. Pogoni redom daju 0.01, 0.02 i 0.04 škarta.

a) *Kolika je verovatnoća da je slučajno izabrani proizvod škart?*
b) *Kolika je verovatnoća da je taj proizvod izrađen u prvom pogonu?*

a) Verovatnoća da je slučajno izabrani proizvod škart.

A: „slučajno izabrani proizvod je škart“

H_1 – „proizvod je izrađen u I pogonu“
$\mathrm{P(H_1)} = 0.2$ i $\mathrm{P(A|H_1)} = 0.01$

H_2 – „proizvod je izrađen u II pogonu“
$P(H_2) = 0.4$ i $P(A|H_2) = 0.02$

H_3 – „proizvod je izrađen u III pogonu“
$P(H_3) = 0.4$ i $P(A|H_3) = 0.04$

$$\mathbf{P(A) = P(H_1)\,P(A|H_1) + P(H_2)\,P(A|H_2) + P(H_3)\,P(A|H_3)}$$

$$P(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}01 + 0{,}4 \cdot 0{,}02 + 0{,}4 \cdot 0{,}04 = 0{,}026 \quad \rightarrow \quad 2{,}6\ \%$$

b) Verovatnoća da je taj proizvod izrađen u prvom pogonu.

$$\mathbf{P(H_1|A)} = \frac{\mathbf{P(H_1)\,P(A|H_1)}}{\mathbf{P(A)}} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}01}{0{,}026} = 0.0769 \quad \rightarrow \quad 7{,}69\ \%$$

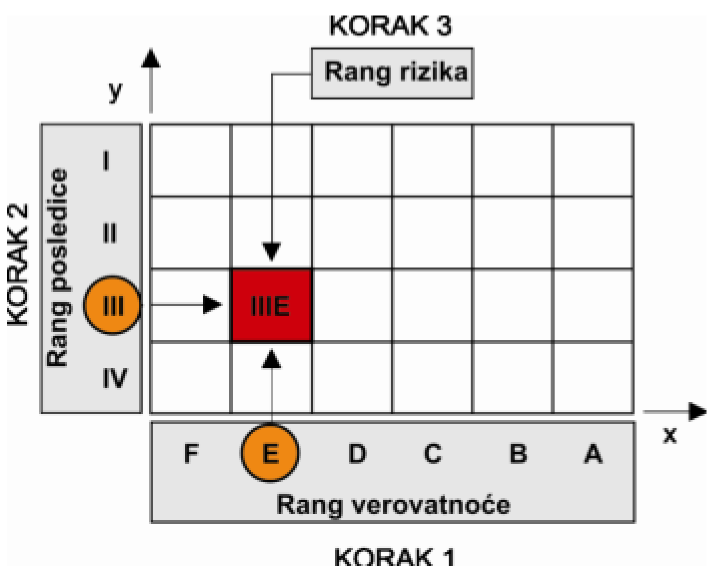
I I I D E O

1. MATRICE ZA PROCENU RIZIKA

Procena rizika kvalitativnom metodom podrazumeva korišćenje nenumeričkih, odnosno kvalitativno opisanih podataka. Ovoj grupi metoda za procenu rizika pripadaju matrice rizika (matrice za rangiranje rizika).

Rangiranje rizika se zasniva na matrici, koja za svoje ose ima rangove verovatnoće i uticaja (posledice). Učesnici u timu za procenu rizika često koriste u radu matricu rizika za uspostavljanje logičke povezanosti verovatnoće i uticaja u procenjivanju rizika za prethodno identifikovane opasnosti/štetnosti. Takođe, koriste se kao jednoobrazno definisan način određivanja stepena, odnosno nivoa pojedinih rizika koji se procenjuju.

Matrica rizika (Slika 13) se formira tako što se na *x*-osu nanose rangovi verovatnoće (korak 1), a na *y*-osu rangovi posledica (korak 2). Kombinacija prethodno navedenih nivoa rangiranja daje rang rizika (korak 3).



Slika 13. *Formiranje matrice rizika*

Tipične kvalitativne metode za procenu rizika predstavljene su sledećim matricama za procenu rizika:

- matrica rizika 4x6 (MIL-STD-882C),
- matrica rizika 5x5 (AS/NZS 4360: 2004) i
- matrica rizika 3x3 (OHSAS standard).

1.1. Matrica rizika 4x6 (MIL-STD-882C)

Američki vojni standard (*American Military Standard*) preporučuje upotrebu matrica procene rizika:

- 4x6 (MIL-STD-882C),
- 5x5 (MIL-STD-882B) i
- 4x5 (MIL- STD-882D).

Matrica 4x6 (MIL-STD-882C) sadrži četiri nivoa (I, II, III i IV), odnosno kvalitativna opisa posledice, koji se odnose na profesionalna oboljenja/povrede, gubitak opreme i radnog vremena i uticaj na životnu sredinu. Kvalitativni opis i definicija verovatnoće nastanka neželjenog događaja predstavljeni su sa šest nivoa (A, B, C, D, E i F).

Pri korišćenju ove matrice prepoznaju se tri kvalitativna opisa nivoa rizika (povećan, srednji i mali rizik). Rizik se smatra neprihvatljivim ukoliko je procenjen kao povećan, a prihvatljivim ako pripada oblasti srednjeg ili malog rizika.

Interpretacija matrice za procenu riziku MIL-STD-882C prikazana je na Slici 14.

POSLEDICE						VEROVATNOĆA					
Nivo		Ljudi	Reputacija	Poslovni proces i sistemi	Finansije	1	2	3	4	5	Nivo
						Retko 1 u 10000 – 100000	Nevero-vatno 1 u 1000 – 10000	Moguće 1 u 100 -1000	Verovatno 1 u 10 - 100	Skoro sigurno > 1 u 10	Opis
						Može da se desi u nekim slučajevima	Verovatno se neće desiti	Može da se desi nekad u budućnosti	Verovatno će se desiti	Očekuje se da se desi u većini slučajeva	Definicija
1	Bezna-čajna	Povrede i bolesti koje ne zahtevaju medicinski tretman	Interna kontrola	Manje greške u sistemima ili procesima koje zahtevaju korektivnu akciju	1% budžeta	L	L	L	M	M	
2	Mala	Male povrede koje zahtevaju samo prvu pomoć	Posmatranje od strane unutrašnje kontrole da bi se sprečile eskalacije	Neispunjenje procedure u procesu	2,5% budžeta	L	M	M	M	H	
3	Umerena	Ozbiljne povrede koje zahtevaju hospitalizaciju ili višestruki medicinski tretman	Posmatranje koje zahteva spoljne izvršioce ili istragu	Zahtevi za jednu ili više odgovornosti nisu ispunjeni	> 5% budžeta	M	M	M	H	H	
4	Ozbiljna	Povrede koje ugrožavaju život ili višestruke povrede koje zahtevaju hospitalizaciju	Intezivni javni ili politički značaj	Strategije nisu u saglasnosti sa nacionalnim planom	> 10% budžeta	H	H	H	H	E	
5	Katastro-falna	Smrt ili višestruke povrede koje ugrožavaju život	Javnost	Kritični pad sistema, loša politika savetovanja	> 25% budžeta	H	H	E	E	E	

E	Ekstremni rizik	Ekstremni i povećani rizici zahtevaju detaljan plan radi smanjenja na srednji ili mali rizik	Radno mesto sa povećanim rizikom
H	Povećani rizik		
M	Srednji rizik		Radno mesto nije sa povećanim rizikom
L	Mali rizik		

Slika 14. *Matrica rizika prema AS/NZS 4360:2004*

1.2. Matrica rizika 3x3 (OHSAS standard)

U preporukama za primenu OHSAS standarda Evropske agencije za bezbednost i zdravlje na radu preporučuje se matrica 3x3, koja je prikazana na Slici 15. Matrica ima tri nivoa za kvalitativni opis verovatnoće (neverovatno, verovatno i veoma verovatno), kao i za opis posledice (umerene, srednje i velike). Rizik takođe ima tri nivoa izražena kvalitativnim opisom: mali, srednji i veliki.

		POSLEDICE		
		Umerene – nesreće i bolesti ne prouzrokuju dugotrajne posledice (lakše povrede, iritacija oka, glavobolja itd.)	**Srednje** – nesreće i bolesti prouzrokuju srednje, ali ne i dugotrajne posledice (frakture, opekotine drugog stepena na ograničenoj površini tela, alergije itd.)	**Velike** – nesreće i bolesti koje prouzokuju teške i stalne posledice i/ili smrt (amputacije, složene frakture koje vode u nesposobnost -invaliditet, kancer, opekotine drugog ili trećeg stepena i na velikoj površini tela itd).
VEROVATNOĆA	**Neverovatno** – ne bi trebalo da se desi tokom čitave profesionalne karijere zaposlenog	Mali (1)	Mali (1)	Srednji (2)
	Verovatno – može da se desi samo nekoliko puta tokom profesionalne karijere zaposlenog	Mali (1)	Srednji (2)	Visoki (3)
	Veoma verovatno – može se desiti više puta tokom profesionalne karijere zaposlenog	Srednji (2)	Visoki (3)	Visoki (3)

3	Visoki rizik	Neprihvatljivi rizik	Radno mesto sa povećanim rizikom
2	Srednji rizik	Prihvatljivi rizik	Radno mesto nije sa povećanim rizikom
1	Mali rizik		

Slika 15. *Matrica procene rizika prema OHSAS-u*

Prednost svih matrica rizika se oslikava u onemogućavanju prihvatanja neprihvatljivog rizika, tako što omogućavaju donošenje operativnih, inženjerskih odluka u cilju smanjenja rizika na prihvatljiv nivo.

Učesnici u timu za procenu rizika ističu da sve matrice rizika karakterišu sledeća ograničenja:

- mogućnost primene samo za identifikovane opasnosti/štetnosti (nije alat za identifikaciju opasnosti/štetnosti),
- veliki stepen subjektivnosti pri procenjivanju rizika i
- mogućnost samo komparativne, odnosno uporedne analize nivoa rizika.

1.3. Matrična metoda procene rizika

Prvi pristup procene rizika prema polukvantitativnoj metodi zasniva se na formiranju matrice na osnovu kombinacije tabela i podmatrice, za procenu rizika kao proizvoda verovatnoće nastanka neželjenog događaja i njegove posledice.

Jedna od priznatih polukvantitativnih metoda za procenu rizika je matrica 5x5 zasnovana na priznatim i poznatim metodama ***AUVA*** (***A****llegemeine* ***U****nfall* ***V****ersicherungs* ***A****nstalt* - metoda austrijskog udruženja proizvođača celuloze i papira) i ***BG*** (***B****erufs* ***G****enossenschaften* - metoda nemačkih strukovnih inženjera). Potrebno je učiniti više koraka da bi se uspostavila matrica 5x5 za procenu rizika.

Prvi korak predstavlja formiranje podmatrice – verovatnoće nastanka neželjenog događaja. Za uspostavljanje ove matrice potrebno je obuhvatiti razmatranje sledećih faktora:

- *izloženost zaposlenih opasnostima/štetnostima* predstavlja trajanje i učestalost ili njihovu kombinaciju, a iskazuje se kao vreme trajanja ili učestalost pojavljivanja. Za faktor izloženosti opasnosti/štetnosti u Tabeli 5 dati su kvalitativni opisi, kvantitativni rangovi i procenti izloženosti opasnostima/štetnostima tokom celog radnog dana, radnog vremena jedne smene ili celokupnog vremena rada u tehnološkom procesu i
- *ispunjenost zahteva bezbednosti i zdravlja na radu* (stanje bezbednosti i zdravlja na radu).

Za određivanje postojećeg stanja bezbednosti i zdravlja na radnom mestu i u radnoj okolini koristi se ček-lista (Tabela 6), koja obuhvata pitanja vezana za zahteve bezbednosti i zdravlja na radu. Odgovori DA/NE se daju na osnovu nivoa usklađenosti za zahtevima bezbednosti i zdravlja na radu definisanim u zakonima, pravilnicima, standardima, propisima i normama.

Tabela 5. *Metoda matrica 5x5 (AUVA i BG) – izloženost*

Izloženost opasnostima / štetnostima tokom radnog dana u % (nedelje, meseca, godine)	**Kvalitativni opis izloženosti opasnostima / štetnostima**	**Kvantitativno rangiranje izloženosti opasnostima/štetnostima**
		Rang
0 – 20 %	Vrlo retko	1
21 – 40 %	Povremeno	2
41 – 60 %	Često	3
61 – 80 %	Pretežni deo radnog vremena	4
81 – 100 %	Sve radno vreme	5

***Tabela 6.** Metoda matrica 5x5 (AUVA i BG) - ček–lista*

Redni broj	Pravila bezbednosti i zdravlja na radu	Analiza i procena usklađenosti sa zahtevima	Stanje bezbednosti i zdravlja na radu DA/NE
1.	Radni prostor		
2.	Radna površina		
3.	Sredstva i oprema za rad		
4.	Sirovine, osnovni i pomoćni materijali		
5.	Zaštita od udara električne struje		
6.	Zaštita od atmosferskog pražnjenja		
7.	Grejanje i ventilacija		
8.	Mikroklima		
9.	Osvetljenost		
10.	Elektromagnetno zračenje		
11.	Buka		
12.	Vibracije		
13.	Hemijske štetnosti		
14.	Biološke štetnosti		
15.	Atmosferski i klimatski uticaji		
16.	Zaštita od požara i eksplozije		
17.	Sredstva i oprema za ličnu zaštitu		
18.	Putevi za prolaz, prilaz i evakuaciju		
19.	Osposobljenost za bezbedan rad		
20.	Obaveštenost iz oblasti BZR (znakovi i upozorenja)		
21.	Pružanje prve pomoći		
22.	Zaštita nepušača, zabrana uzimanja alkohola i drugih sredstava zavisnosti		
23.	Održavanje radnih prostorija		
24.	Stanje prostorije za ličnu higijenu		
25.	Inspekcijski nalazi o izvršenom nadzoru		
26.	Evidencije o povredama, profesionalnim oboljenjima i oboljenjima u vezi sa radom		
27.	Promocija zdravlja na radu		
28.	Kultura bezbednosti		

Ispunjenost zahteva bezbednosti i zdravlja na radu na osnovu popunjenih i analiziranih ček-lista (Tabela 6) dati su kvalitativnim opisom i kvantititativnim rangiranjem, što je predstavljeno u Tabeli 7.

Tabela 7. *Metoda matrica 5x5 (AUVA i BG) - ispunjenost zahteva bezbednosti i zdravlja na radu*

Ispunjenost zahteva bezbednosti i zdravlja na radu u %	**Kvalitativni opis ispunjenosti zahteva**	**Kvantitativno rangiranje ispunjenosti zahteva**
		Rang
81 -100 %	Zadovoljavajuće – nastaviti sa radom	1
61 - 80 %	Preduzeti srednjoročne potrebne mere	2
41 – 60 %	Preduzeti kratkoročne potrebne mere	3
21 – 40 %	Trenutno potrebne mere	4
0 - 20 %	Mere za trenutni prekid rada	5

Rezultat prvog koraka razmatranja procene rizika je uspostavljanje podmatrice verovatnoće nastanka neželjenog događaj (Tabela 8), a vrednost u svakom kvadrantu predstavlja proizvod nivoa rangiranja iz prethodna dva faktora.

Tabela 8. *Metoda matrica 5x5 (AUVA i BG) - matrica verovatnoće nastanka neželjenog događaja*

Izloženost opasnostima/ štetnostima		**Stanje bezbednosti i zdravlja na radu**				
		Zadovoljavajuće – nastaviti sa radom	Srednjoročne potrebne mere	Kratkoročne potrebne mere	Trenutno potrebne mere	Mere za trenutni prekid rada
		1	2	3	4	5
Vrlo retko	1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Povremeno	2	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**
Često	3	**3**	**6**	**9**	**12**	**15**
Pretežni deo radnog vremena	4	**4**	**8**	**12**	**16**	**20**
Sve radno vreme	5	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**

Rangovi verovatnoće nastanka neželjenog događaja su od 1 do 25, a kvalitativni opis verovatnoće i kvantitativni rang su prikazani u Tabeli 9.

Tabela 9. *Metoda matrica 5x5 (AUVA i BG) - rang matrice verovatnoće nastanka neželjenog događaja*

Brojčana vrednost verovatnoće	Kvalitativni opis verovatnoće	Kvantitativni rang verovatnoće
1,2	Zanemarljiva	1
3, 4, 5	Mala	2
6, 8, 9	Srednja	3
10, 12,15, 16	Velika	4
20, 25	Izrazito velika	5

Drugi korak za procenu rizika obuhvata analizu mogućih posledica od opasnosti i štetnosti, koje se iskazuju kao povrede, profesionalna oboljenja ili oboljenje u vezi sa radom. Na osnovu opisa posledice i kvalitativnog opisa težine posledice u Tabeli 10 je prikazan kvantitativni rang težine moguće posledice.

Tabela 10. *Metoda matrica 5x5 (AUVA i BG) - rang težine moguće posledice*

Opis posledice	Kvalitativni opis težine posledice	Kvantitativni rang težine posledice
Nema opasnosti za život. Beznačajno oštećenje organa. Funkcija održana. Radna sposobnost održana – ogrebotine i manje modrice	Vrlo laka	1
Nema opasnosti za život. Lako oštećenje organa. Privremeno oštećenje funkcija. Radna nesposobnost kratkotrajna – modrice, nagnječenja, posekotine.	Laka	2
Potencijalna opasnost za život. Značajno oštećenje organa ali bez komplikacija. Privremeno bitno smanjenje funkcija. Privremena nesposobnost za rad – rane, ubodi, razderotine, veća nagnječenja, iščašenja i prelomi.	Srednje teška	3
Stvarna opasnost za život. Trajno oštećenje ili uništenje organa. Trajna radna nesposobnost. Amputacija, nagnječenje organa, višestruke povrede i oštećenje nerava.	Teška	4
Smrt ili kolektivna povreda	Smrtna ili kolektivna	5

Krajnji rezultat prvog pristupa procene rizika je uspostavljanje matrice rizika. Primenom matrice rizike određuje se rang rizika kao proizvod nivoa rangiranja verovatnoće nastanka neželjenog događaja i nivoa rangiranja težine mogućih posledica. U matrici rizika prikazan je način ocenjivanja rizika koji se sastoji od dva faktora.

U razmatranje uvodimo pet nivoa rangiranja za verovatnoću i za posledice. Kvalitativan opis verovatnoće i posledice prikazan je u Tabeli 11.

Tabela 11. *Metoda matrica 5x5 (AUVA i BG) - matrica rizika*

Verovatnoća nastanka neželjenog događaja		**Težina moguće posledice**				
		Vrlo laka povreda	Laka povreda	Srednje teška povreda	Teška povreda	Smrtna ili kolektivna povreda
		Bolest bez ikakvih posledica	Bolest - posledice bitno utiču na radnu sposobnost	Bolest – posledice mogu ograničiti radnu sposobnost	Bolest – trajne posledice koje uzrokuju gubitak radne sposobnosti, koje delom ograničavaju životnu aktivnost, bolest progresivne prirode	Bolest – značajno ograničena životna aktivnost ili smrtna bolest
		1	2	3	4	5
Zanemarljiva	1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Mala	2	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**
Srednja	3	**3**	**6**	**9**	**12**	**15**
Velika	4	**4**	**8**	**12**	**16**	**20**
Izrazito velika	5	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**

Svakom rangu verovatnoće i posledice pridodata je brojčana vrednost. Pažljivom analizom matrice rizika lako se uočava da ravnomerna skala kvalitativnog rangiranja verovatnoće i posledice odgovara neravnomernoj kvalitativnoj skali. Vrednosti u svakom kvadratu matrice se dobijaju kao proizvodi nivoa rangiranja verovatnoće i posledice na osnovu definicije rizika.

Osim rangiranja brojčane vrednosti rizika u pet nivoa (Tabela 12) predloženi su načini i mere za sprečavanje, otklanjanje ili smanjenje rizika.

Tabela 12. *Metoda matrica 5x5 (AUVA i BG) - rangiranje rizika*

Brojčana vrednost rizika	**Kvalitativni opis rizika**	**Kvantitativni rang rizik**	**Način i mere za otklanjanje, smanjenje ili sprečavanje rizika**
1, 2	Beznačajan	1	Optimalni uslovi rada (optimalna zaštita zaposlenih).
3, 4, 5	Mali	2	Zadovoljavajući uslovi rada (poboljšanjem radne discipline zaposlenih i unutrašnjeg nadzora rizik se može dovesti na rang 1).
6, 8, 9	Srednji	3	Uslovi rada u kojima, pod određenim uslovima, može doći do realizacije potencijalne opasnosti/štetnosti i postoji preostali rizik koji se mora staviti pod kontrolu.
10, 12, 15, 16	Visok	4	Rad se odvija u otežanim uslovima uz veliku mogućnost nastanka povrede ili oštećenja zdravlja zaposlenih preduzeti dodatne mere zaštite na bazi analize povređivanja i bolesti zaposlenih.
20, 25	Ekstremni	5	Vrlo teški uslovi rada uz stalnu izloženost zaposlenih opasnostima/štetnostima tokom obavljanja radnih aktivnosti / neophodna zabrana rada.

Očigledno je da je rizik 5 manji od rizika 25, ali da li je stvarno pet puta manji ? Vrednosti 7, 11, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 22, 23 i 24 uopšte nije moguće dobiti primenom ove matrice rizika, odnosno zbog formalnosti uvođenja kvantitativnih nivoa rangiranja, brojčane ocene izlaze kao nejednake. Proizilazi da rizik kod ovakve ocene ima diskretnu skalu, odnosno da se može pojaviti samo jedna od unapred određenih i poznatih vrednosti rizika, što ograničava mogućnost upravljanja rizikom. Zato se kod ovakvog pristupa predlaže da se konačne vrednosti rizika vrate u kvalitativni opis rizika. Npr. beznačajan rizik (1...2), mali rizik (3...5), srednji rizik (6...9), visok rizik (10...16) i ekstremni rizik (20...25).

Kvantitativni rang rizika se mora odrediti za svaku identifikovanu, odnosno moguću opasnost/štetnost na radnom mestu i u radnoj okolini. Radna mesta sa rangovima rizika 1 i 2 smatraju se radnim mestima sa prihvatljivim rizikom, a sa povećanim rizikom su radna mesta sa rangovima 3, 4 i 5.

2. PRIMENA MONTE CARLO METODE ZA DONOŠENJE ODLUKA U USLOVIMA RIZIKA

Bilo koji način rešavanja problema koji se oslanja na generisanje velikog broja slučajnih brojeva i razmatranje udela tih brojeva koji pokazuje željena svojstva naziva se Monte Carlo metoda. Monte Carlo metodu je 1946. godine osmislio Stanislaw Ulam dok je radio na razvoju nuklearnog oružja u *Los Alamos National Laboratory,* a ime je dobila po kazinima Monte Carla gde se ujak S. Ulama često kockao. Vrednost metode je ubrzo prepoznao John von Neumann koji je napisao program za prvi elektronski računar, ENIAC.

Monte Carlo je probabilistički računski algoritam u kojem se vrednost jedne ili više slučajnih varijabli zadaje funkcijom gustine, a kojem je cilj predviđanje svih mogućih ishoda procesa, kao i verovatnoće njihovog pojavljivanja. Nad rezultatima Monte Carlo simulacije moguće je sprovesti analizu osetljivosti kako bi se identifikovali činioci koji najviše utiču na ishod procesa, kako bi se njihov uticaj ograničio ili naglasio, u zavisnosti od njihove prirode.

Algoritam se može objasniti na sledeći način:

1. matematički modelovati poslovni proces,
2. pronaći varijable čije vrednosti nisu u potpunosti izvesne,
3. odrediti funkcije gustine koje dobro opisuju učestalosti kojima slučajne varijable poprimaju svoje vrednosti,
4. ukoliko među varijablama postoje korelacije, napraviti matricu korelacija,
5. u svakoj iteraciji svakoj varijabli dodeliti slučajnu vrednost proizišlu iz funkcije gustine,
6. izračunati izlazne vrednosti i spremiti rezultate,
7. korake 5 i 6 ponavljati *n* puta,
8. statistički analizirati rezultate simulacije.

Monte Carlo metoda je veoma korisna u procesu donošenja odluka u uslovima rizika.

2.1. Mogućnost primene Monte Carlo metode na primeru agroekonomskog problema prilikom donošenja odluka

Farmer poseduje L hektara zemlje na kojima može posejati dve kulture – soju i pšenicu. Troškovi za soju i pšenicu obeleženi su sa T_1 i T_2 novčanih jedinica po hektaru, a volumen potrebnih skladišta za te kulture sa S_1 i S_2 volumnih jedinica po hektaru. Ukupni dostupni volumen skladišta iznosi S volumnih jedinica. Prihodi od soje i pšenice su P_1 i P_2 novčanih jedinica po hektaru, dok je ukupna količina sredstava sa kojima farmer raspolaže obeležena sa U novčanih jedinica. Cilj je odrediti kolike povrišne treba zasejati kojom kulturom kako bi mu profit bio maksimalan.

Funkcija cilja glasi:

$$z = P_1 x + P_2 y \qquad (1)$$

a ograničenja se mogu izraziti kao:

$$x + y \leq L \qquad (2)$$

$$T_1 x + T_2 y \leq U \qquad (3)$$

$$S_1 x + S_2 y \leq S \qquad (4)$$

$$x \geq 0 \qquad (5)$$

$$y \geq 0 \qquad (6)$$

U matričnom obliku koji je primereniji računskoj obradi problem (1) glasi:

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (7)$$

dok se ograničenja (2), (3) i (4) mogu izraziti kao:

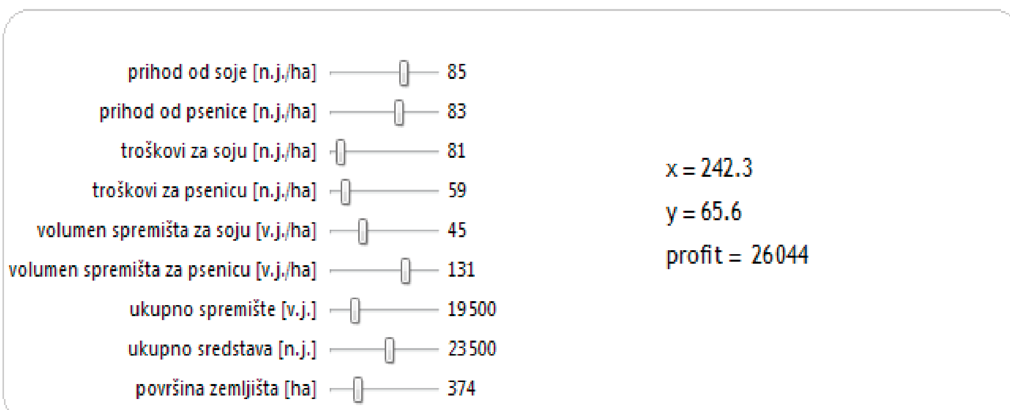
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ T_1 & T_2 \\ S_1 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} L \\ U \\ S \end{bmatrix} \tag{8}$$

a ograničenja (5) i (6) kao:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Jednačine (1)-(6), odnosno (7)-(9) predstavljaju matematički opis problema koji se može rešavati nekom od metoda linearnog programiranja. U ovom primeru jednačine predstavljaju matematički model poslovnog procesa koji će poslužiti prilikom odlučivanja o vrsti kulture koju farmer treba da zaseje.

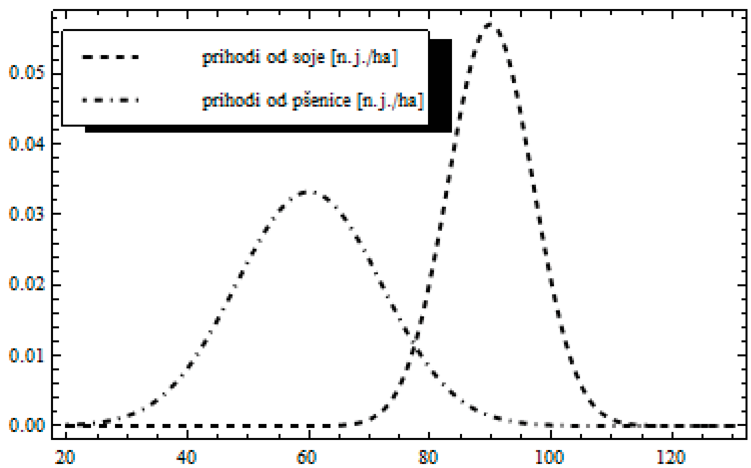
Na Slici 16 je prikazan korisnički interfejs programa koji rešava opisani problem simplex algoritmom. S leve strane se nalaze klizači kojima se podešavaju odgovarajući uslovi i ograničenja. S desne strane su prikazani očekivani profit i površine u hektarima na kojima treba zasejati soju, odnosno pšenicu kako bi se taj profit ostvario. Vidi se da u ovom slučaju ne treba iskoristiti ukupnu dostupnu poljoprivrednu površinu kako bi se ostvario maksimalni profit.



Slika 16. *Rezultati linearne optimizacije sa ograničenjima*

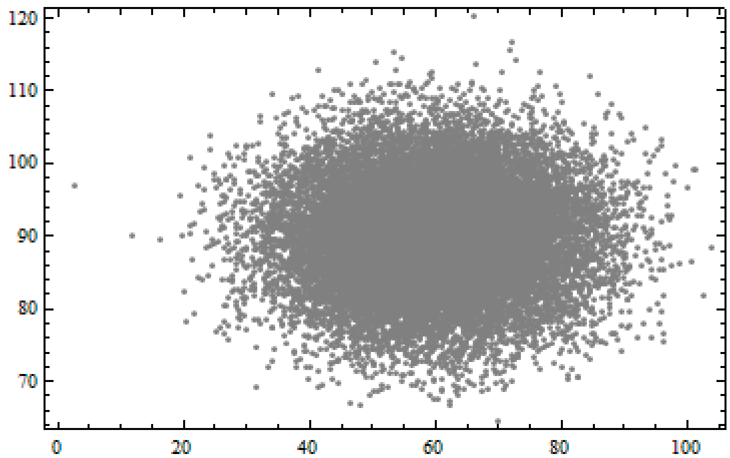
2.2. Monte Carlo simulacija

Sledeći korak je proširiti program za izvođenje Monte Carlo simulacije. Neophodno je pronaći varijable koje imaju inherentnu nesigurnost. One se kod komplikovanih poslovnih procesa pronalaze analizom osetljivosti i nesigurnosti. Međutim, u okviru datog primera to nije potrebno jer su prihodi od prodaje pšenice i soje P_1 i P_2 jedine varijable koje imaju značajnu nesigurnost i to zbog nemogućnosti tačnog prognoziranja otkupnih cena za narednu godinu. Potrebno je odrediti funkciju gustine koja dobro opisuje raspon i učestalost vrednosti koje su cene pšenice i soje u prošlosti poprimale. Pretpostavlja se da su cene soje i pšenice normalno distribuirane i da samim tim imaju različite standardne devijacije, kao što je i prikazano na Slici 17.



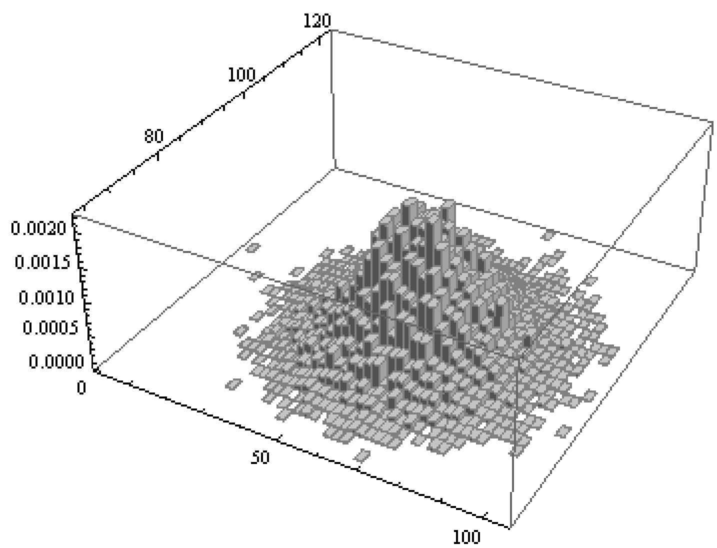
Slika 17. *Distribucije očekivanih cena soje i pšenice*

Dalje se pretpostavlja da između cene pšenice i cene soje ne postoji značajna korelacija koju bi trebalo uzeti u obzir prilikom slučajnog uzorkovanja vrednosti iz funkcija gustine. Sparivanjem slučajnih vrednosti iz obe distribucije dobijenih iterativnim postupkom dobija se dvodimenzionalni grafikon prikazan na Slici 18.



Slika 18. *Parovi cena dobijenih slučajnim izborom iz poznatih distribucija*

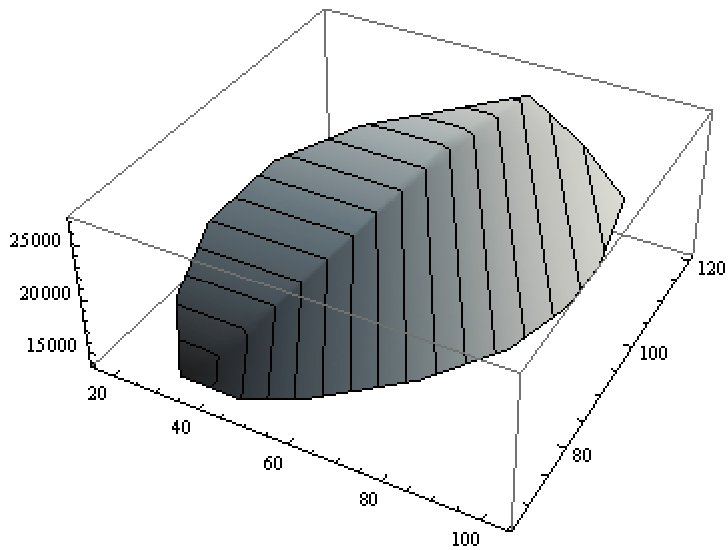
Gustina tačaka označava učestalost pojavljivanja parova cena. Kako je i očekivano, najčešći su oni parovi koji su najbliži srednjoj vrednosti pojedine distribucije. Zbog nepreglednosti tačaka u središnjem delu grafikona konstruiše se trodimenzionalni histogram u kojem visina stupca daje informaciju o relativnoj učestalosti pojavljivanja parova cena (Slika 19).



Slika 19. *Trodimenzionalni histogram učestalosti pojavljivanja parova prihoda od poljoprivrednih kultura*

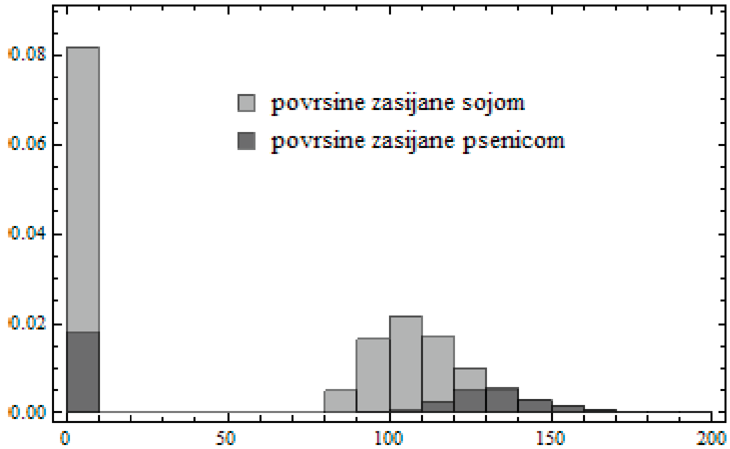
U ovako jednostavnom slučaju informacije dobijene grafikonima na Slikama 18 i 19 su očekivane, međutim u slučaju da postoji više od dve slučajne varijable od kojih svaka ima svoju funkciju gustine, grafički prikaz postaje nemoguć, a sprovođenje Monte Carlo simulacije nužno.

Za svaku kombinaciju cena koja se pojavila slučajnim uzorkovanjem se izvodi linearna optimizacija simplex algoritmom, pa se dobijeni rezultati (profit, površina zasejana pšenicom, površina zasejana sojom) spremaju za kasniju obradu. U ovom slučaju je broj slučajnih brojeva 20.000, što ujedno predstavlja i broj iteracija Monte Carlo simulacije. Pretpostavljeno je da veći broj iteracija nije potreban jer su se sve kombinacije dvaju prihoda koje su se mogle pojaviti zajedno zapravo i pojavile. Pretpostavka se pokazala kao tačna naknadnim upoređivanjem rezultata sa različitim brojem uzoraka. Na Slici 20 su prikazani maksimalni profiti za slučajda varijable bez nesigurnosti (parametri) poprime prognozirane vrednosti, a varijable sa značajnim nesigurnostima poprime slučajne vrednosti u svakoj iteraciji, prema pretpostavljenim distribucijama.



Slika 20. *Maksimalni profit kao rezultat optimizacijskog algoritma sa slučajnim ulaznim parametrima – očekivanim prihodima*

Konačni cilj Monte Carlo simulacije je odrediti koje kulture zasejati na kolikim površinama, kako bi se profit maksimizirao. Odgovor se može dobiti statističkom analizom rezultata Monte Carlo simulacije. Na Slici 21 je prikazan histogram rezultata dobijenih simulacijom koji važi za jedan set vrednosti parametara U, L, S, T_1, T_2, S_1 i S_2.



Slika 21. *Učestalost pojave površina zasejanih naznačenim poljoprivrednim kulturama u rezultatima Monte Carlo simulacije*

Iz rezultata Monte Carlo simulacije može se zaključiti da će se u razmatranom agroekonomskom problemu najveći profit ostvariti sejanjem soje. Pretpostavljeno je da su troškovi sejanja soje po hektaru viši nego troškovi sejanja pšenice, pa se to u rezultatima ogleda kao veći broj rešenja u kojima prihodi od prodaje soje nisu dovoljno visoki da pokriju troškove njenog sejanja, odnosno rešenja u kojima se soja seje na nula hektara. Verovatnoća da prihodi od prodaje poljoprivrednih dobara ne pokriju troškove je veća nego verovatnoća ostvarivanja profita, što se može zaključiti po učestalosti pojave „nul-rešenja" naspram profitabilnih rešenja na Slici 21. Ta verovatnoća se može shvatiti kao svojevrstan ukupni rizik poslovnog procesa.

Monte Carlo simulacija menadžeru daje najbolje informacije potrebne za donošenje odlula u svakoj mogućoj kombinaciji ulaznih parametara, a uz to daje i povratnu informaciju o ukupnom riziku vezanom za odluku.

L I T E R A T U R A

Airmic, ALARM and IRM, *A structured approach to enterprise risk management and the requirements of ISO 31000*, 2010.

Crnjac Milić D., Masle D., (2013), Mogućnost primjene Monte Carlo metode na primjeru agroekonomskog problema prilikom donošenja odluka u uvjetima rizika, *Ekonomski vjesnik*, XXVI, 1, 309-314.

European Agency for Safety and Health at Work, Safety and Health at Work is Evertyone's Concern, Nürnberg, Germany, 2007.

Gemović, B., (2011), Upravljanje rizicima kao elemenat integrisanog sistema menadžmenta preduzeća. (doktorska disertacija), Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu.

Kočović, J., *Aktuarske osnove formiranja tarifa u osiguranju lica*, Beograd, 2012.

Kočović, J., Mitrašević, M., Rajić, V., *Aktuarska matematika*, Beograd, 2014.

Kočović, J., Šulejić, P., Rakonjac Antić, T., *Osiguranje*, Beograd, 2010.

Leitch, M., (2010), ISO Guide 73 (2009) Risk Management: Vocabulary, International Organization for Standardization (ISO), Geneva.

Leitch, M., (2010), ISO 31000:2009 – The New International Standard on Risk Management, *Risk Analysis*, 30, 887-892.

Ozog, *Designing an Effective Risk Matrix*, ioMosaic Corporation, 2002.

Pravilnik o izradi procjene opasnosti, Narodne novine br. 48/97, 114/02, 126/03 i 114/09.

Ristić, D., Stanković, M., Savić, S., *Matrice za procenu rizika*, 11th Interna-tional Conference Dependability and Quality Management, ICDQM-2008, Zbornik radova, 580-587, Istraživački centar DQM, Beograd, 2008.

Stanković, M., Savić, S., *AUVA metod za procenu profesionalnog rizika: teorija i praksa*, 11th International Conference Dependability and Quality Management, ICDQM-2008, Zbornik radova, 83-92, Istraţivači centar DQM, Beogard, 2008.

Tesco, (2009), Tomorrow's companies, *The Economist*, 4 March, 27-30.

Vujović, R., *Upravljanje rizicima i osiguranje*, Beograd, 2009.

Woods, M., Humphrey, C. And Dowd, K., (2009), Market risk reporting by the world's top banks: evidence on the diversity of reporting practice and the implications for international accounting harmonisation, *Revista de Contabilidad – Spanish Accounting Review*, 11 (2), 9-42.

Živković, Ž., Savić, M., Upravljanje rizikom (autorizovana predavanja), Bor, 2013.

P R I L O Z I

PRILOG 1.

Tablica smrtnosti 17 engleskih društava

x	lx	Dx	Nx	Sx	dx	Cx	Mx	Rx	ax	x
10	100000	67556,42	1381771,34	24814821,75	676	439,12	14411,37	427355,12	20,4536	**10**
11	99324	64518,98	1314214,92	23433050,41	674	420,98	13972,25	412943,75	20,3694	**11**
12	98650	61616,50	1249695,95	22118835,48	672	403,59	13551,27	398971,50	20,2818	**12**
13	97978	58843,05	1188079,45	20869139,54	671	387,49	13147,68	385420,23	20,1907	**13**
14	97307	56192,37	1129236,40	19681060,09	671	372,58	12760,20	372272,55	20,0959	**14**
15	96636	53658,54	1073044,03	18551823,69	671	358,25	12387,62	359512,35	19,9976	**15**
16	95965	51236,50	1019385,49	17478779,66	672	344,99	12029,36	347124,73	19,8957	**16**
17	95293	48920,88	968148,99	16459394,17	673	332,21	11684,38	335095,37	19,7901	**17**
18	94620	46707,09	919228,12	15491245,18	675	320,38	11352,17	323410,99	19,6807	**18**
19	93945	44590,28	872521,02	14572017,06	677	308,97	11031,78	312058,83	19,5675	**19**
20	93268	42566,30	827930,74	13699496,04	680	298,41	10722,81	301027,05	19,4504	**20**
21	92588	40630,73	785364,44	12871565,30	683	288,20	10424,40	290304,24	19,3293	**21**
22	91905	38779,81	744733,72	12086200,86	686	278,33	10136,21	279879,84	19,2042	**22**
23	91219	37009,95	705953,91	11341467,14	690	269,18	9857,88	269743,63	19,0747	**23**
24	90529	35317,31	668943,96	10635513,24	694	260,33	9588,69	259885,76	18,9410	**24**
25	89835	33698,62	633626,65	9966569,28	698	251,76	9328,36	250297,06	18,8027	**25**
26	89137	32150,76	599928,03	9332942,63	703	243,81	9076,60	240968,70	18,6598	**26**
27	88434	30670,38	567777,28	8733014,60	708	236,10	8832,79	231892,10	18,5122	**27**
28	87726	29254,64	537106,90	8165237,32	714	228,95	8596,69	223059,31	18,3597	**28**
29	87012	27900,52	507852,25	7628130,42	720	221,99	8367,74	214462,62	18,2022	**29**
30	86292	26605,43	479951,73	7120278,17	727	215,53	8145,75	206094,88	18,0396	**30**
31	85565	25366,62	453346,30	6640326,43	734	209,23	7930,23	197949,13	17,8718	**31**
32	84831	24181,75	427979,68	6186980,13	742	203,38	7720,99	190018,90	17,6985	**32**
33	84089	23048,30	403797,93	5759000,46	750	197,66	7517,62	182297,91	17,5196	**33**
34	83339	21964,17	380749,62	5355202,53	758	192,09	7319,95	174780,29	17,3350	**34**
35	82581	20927,30	358785,45	4974452,91	767	186,89	7127,86	167460,34	17,1444	**35**
36	81814	19935,51	337858,15	4615667,45	776	181,81	6940,97	160332,48	16,9476	**36**
37	81038	18986,95	317922,64	4277809,30	785	176,85	6759,15	153391,51	16,7443	**37**
38	80253	18079,83	298935,69	3959886,66	795	172,21	6582,31	146632,36	16,5342	**38**
39	79458	17212,24	280855,86	3660950,97	805	167,67	6410,09	140050,05	16,3172	**39**
40	78653	16382,56	263643,62	3380095,11	815	163,23	6242,42	133639,96	16,0929	**40**
41	77838	15589,23	247261,06	3116451,49	826	159,07	6079,19	127397,54	15,8610	**41**
42	77012	14830,58	231671,83	2869190,43	839	155,36	5920,13	121318,35	15,6212	**42**
43	76173	14104,82	216841,25	2637518,61	857	152,59	5764,77	115398,22	15,3736	**43**
44	75316	13409,74	202736,43	2420677,36	881	150,83	5612,18	109633,45	15,1186	**44**
45	74435	12743,15	189326,69	2217940,93	909	149,63	5461,36	104021,27	14,8571	**45**
46	73526	12103,40	176583,54	2028614,24	944	149,42	5311,72	98559,91	14,5896	**46**
47	72582	11488,46	164480,14	1852030,70	981	149,30	5162,31	93248,19	14,3170	**47**
48	71601	10897,30	152991,67	1687550,56	1021	149,41	5013,00	88085,88	14,0394	**48**
49	70580	10328,76	142094,38	1534558,89	1063	149,58	4863,59	83072,88	13,7572	**49**
50	69517	9781,919	131765,620	1392464,51	1108	149,91	4714,01	78209,29	13,4703	**50**
51	68409	9255,778	121983,701	1260698,89	1156	150,39	4564,10	73495,28	13,1792	**51**
52	67253	8749,395	112727,923	1138715,19	1207	150,99	4413,71	68931,19	12,8841	**52**
53	66046	8261,892	103978,528	1025987,27	1261	151,68	4262,72	64517,48	12,5853	**53**
54	64785	7792,452	95716,636	922008,74	1316	152,20	4111,04	60254,76	12,2832	**54**
55	63469	7340,540	87924,184	826292,10	1375	152,91	3958,84	56143,72	11,9779	**55**
56	62094	6905,301	80583,644	738367,92	1436	153,55	3805,93	52184,88	11,6698	**56**
57	60658	6486,161	73678,343	657784,28	1497	153,92	3652,38	48378,95	11,3593	**57**

Nastavak Priloga 1.
Tablica smrtnosti 17 engleskih društava

58	59161	6082,776	67192,181	584105,93	1561	154,32	3498,46	44726,57	11,0463	**58**
59	57600	5694,498	61109,405	516913,75	1627	154,66	3344,14	41228,11	10,7313	**59**
60	55973	5320,816	55414,907	455804,35	1698	155,20	3189,47	37883,97	10,4147	**60**
61	54275	4960,965	50094,091	400389,44	1770	155,56	3034,27	34694,50	10,0977	**61**
62	52505	4614,595	45133,127	350295,35	1844	155,83	2878,71	31660,23	9,7805	**62**
63	50661	4281,278	40518,531	305162,22	1917	155,77	2722,87	28781,52	9,4641	**63**
64	48744	3960,841	36237,254	264643,69	1990	155,48	2567,10	26058,65	9,1489	**64**
65	46754	3653,017	32276,412	228406,44	2061	154,84	2411,62	23491,55	8,8355	**65**
66	44693	3357,679	28623,395	196130,02	2128	153,72	2256,78	21079,93	8,5248	**66**
67	42565	3074,814	25265,717	167506,63	2191	152,19	2103,06	18823,15	8,2170	**67**
68	40374	2804,366	22190,902	142240,91	2246	150,01	1950,87	16720,10	7,9130	**68**
69	38128	2546,500	19386,536	120050,010	2291	147,13	1800,86	14769,23	7,6130	**69**
70	35837	2301,431	16840,037	100663,474	2327	143,69	1653,74	12968,36	7,3172	**70**
71	33510	2069,223	14538,606	83823,437	2351	139,59	1510,05	11314,63	7,0261	**71**
72	31159	1850,048	12469,383	69284,832	2362	134,85	1370,46	9804,58	6,7400	**72**
73	28797	1644,044	10619,334	56815,449	2358	129,44	1235,61	8434,12	6,4593	**73**
74	26439	1451,369	8975,290	46196,115	2339	123,461	1106,17	7198,516	6,1840	**74**
75	24100	1272,086	7523,921	37220,824	2303	116,885	982,705	6092,351	5,9146	**75**
76	21797	1106,275	6251,835	29696,904	2249	109,754	865,819	5109,646	5,6513	**76**
77	19548	953,9711	5145,55993	23445,0690	2179	102,248	756,065	4243,827	5,3938	**77**
78	17369	815,0314	4191,58886	18299,5091	2092	94,390	653,816	3487,762	5,1429	**78**
79	15277	689,2936	3376,55745	14107,9202	1987	86,205	559,426	2833,945	4,8986	**79**
80	13290	576,5777	2687,2638	10731,3628	1866	77,841	473,221	2274,519	4,6607	**80**
81	11424	476,5601	2110,68611	8044,0990	1730	69,392	395,380	1801,298	4,4290	**81**
82	9694	388,8384	1634,12597	5933,4129	1582	61,015	325,987	1405,918	4,2026	**82**
83	8112	312,8677	1245,28753	4299,2869	1427	52,920	264,972	1079,930	3,9802	**83**
84	6685	247,9139	932,419794	3053,9994	1268	45,215	212,052	814,958	3,7611	**84**
85	5417	193,1635	684,505875	2121,5796	1111	38,093	166,836	602,907	3,5437	**85**
86	4306	147,6410	491,342406	1437,0737	958	31,5838	128,743	436,0703	3,3280	**86**
87	3348	110,3786	343,701451	945,7313	811	25,7091	97,1593	307,3272	3,1138	**87**
88	2537	80,4242	233,322839	602,0299	673	20,5139	71,4502	210,1678	2,9012	**88**
89	1864	56,8171	152,898665	368,7070	545	15,9733	50,9363	138,7176	2,6911	**89**
90	1319	38,6584	96,081611	215,8084	427	12,0336	34,9630	87,7813	2,4854	**90**
91	892	25,1380	57,4231769	119,7267	322	8,7255	22,9294	52,8183	2,2843	**91**
92	570	15,4457	32,2851621	62,3036	231	6,0188	14,2040	29,8889	2,0902	**92**
93	339	8,8328	16,8394605	30,0184	155	3,8833	8,1851	15,6849	1,9065	**93**
94	184	4,6098	8,00664531	13,1789	95	2,2885	4,3019	7,4998	1,7369	**94**
95	89	2,1440	3,39682572	5,1723	52	1,2045	2,0133	3,1979	1,5843	**95**
96	37	0,8570	1,25283563	1,77547813	24	0,5345	0,8089	1,1845	1,4618	**96**
97	13	0,2895	0,39579552	0,52264249	9	0,1927	0,2743	0,3757	1,3670	**97**
98	4	0,0857	0,10625494	0,12684698	3	0,0618	0,0816	0,1014	1,2404	**98**
99	1	0,0206	0,02059204	0,02059204	1	0,0198	0,0198	0,0198	1,0000	**99**

PRILOG 2.

Detaljne tablice smrtnosti za Republiku Srbiju za period 2010.–2012., ukupno stanovništvo

Старост / *Age*	Број посматраних становника *Number of observed population*	Број умрлих *Number of deaths*	Сирова вероватноћа смрти *Raw probability of death*	Изравната вероватноћа смрти *Smoothed probability of death*	Вероватноћа доживљења *Probability of surviving*	Број живих *Number of surviving*	Број мртвих *Number of deaths*	Збир бројева живих *Total number of person-years*	Средње трајање живота *Life expectancy*
x	L_x	T_x	q_x	q_x'	p_x	l_x	d_x	N_x	$\overset{0}{e}_x$
0	133902	851	0,00636	0,00636	0,99364	100000	636	7502824	74,53
1	135017	59	0,00044	0,00044	0,99956	99364	43	7402824	74,00
2	133854	35	0,00026	0,00026	0,99974	99321	26	7303460	73,03
3	132809	21	0,00016	0,00016	0,99984	99295	16	7204139	72,05
4	134345	14	0,00010	0,00010	0,99990	99279	10	7104844	71,06
5	138171	23	0,00017	0,00011	0,99989	99269	11	7005565	70,07
6	141132	10	0,00007	0,00010	0,99990	99258	10	6906296	69,08
7	143498	13	0,00009	0,00007	0,99993	99248	7	6807038	68,09
8	144188	20	0,00014	0,00012	0,99988	99241	11	6707790	67,09
9	144354	18	0,00012	0,00013	0,99987	99230	13	6608549	66,10
10	140289	20	0,00014	0,00014	0,99986	99217	14	6509319	65,11
11	135852	26	0,00019	0,00016	0,99984	99203	16	6410102	64,12
12	138102	20	0,00014	0,00018	0,99982	99187	18	6310899	63,13
13	143078	29	0,00020	0,00019	0,99981	99169	19	6211712	62,14
14	149908	32	0,00021	0,00024	0,99976	99150	24	6112543	61,15
15	158011	42	0,00027	0,00026	0,99974	99126	26	6013393	60,16
16	162031	57	0,00035	0,00031	0,99969	99100	30	5914267	59,18
17	163654	52	0,00032	0,00035	0,99965	99070	35	5815167	58,20
18	165578	56	0,00034	0,00039	0,99961	99035	39	5716097	57,22
19	168970	86	0,00051	0,00045	0,99955	98996	45	5617062	56,24
20	172060	92	0,00053	0,00050	0,99950	98951	49	5518066	55,27
21	172498	86	0,00050	0,00050	0,99950	98902	50	5419115	54,29
22	178254	82	0,00046	0,00052	0,99948	98852	52	5320213	53,32
23	184519	106	0,00057	0,00053	0,99947	98800	52	5221361	52,35
24	185310	97	0,00052	0,00058	0,99942	98748	57	5122561	51,38
25	187272	126	0,00067	0,00061	0,99939	98691	60	5023813	50,40
26	193754	112	0,00058	0,00064	0,99936	98631	63	4925122	49,43
27	198362	144	0,00073	0,00067	0,99933	98568	66	4826491	48,47
28	197315	137	0,00069	0,00071	0,99929	98502	70	4727923	47,50
29	195525	145	0,00074	0,00075	0,99925	98432	74	4629421	46,53
30	196975	152	0,00077	0,00079	0,99921	98358	78	4530989	45,57
31	198756	168	0,00085	0,00085	0,99915	98280	83	4432631	44,60
32	199937	182	0,00091	0,00091	0,99909	98197	89	4334351	43,64
33	201823	207	0,00103	0,00097	0,99903	98108	96	4236154	42,68
34	203430	199	0,00098	0,00102	0,99898	98012	100	4138046	41,72
35	204290	228	0,00112	0,00107	0,99893	97912	105	4040034	40,76
36	201112	226	0,00112	0,00114	0,99886	97807	112	3942122	39,81
37	198025	238	0,00120	0,00123	0,99877	97695	120	3844315	38,85
38	195168	263	0,00135	0,00133	0,99867	97575	130	3746620	37,90
39	192423	288	0,00150	0,00145	0,99855	97445	141	3649045	36,95

Nastavak Priloga 2.

Detaljne tablice smrtnosti za Republiku Srbiju za period 2010.–2012., ukupno stanovništvo

40	190169	298	0,00157	0,00163	0,99837	97304	159	3551600	36,00
41	188995	338	0,00179	0,00181	0,99819	97145	176	3454296	35,06
42	189369	368	0,00194	0,00204	0,99796	96969	197	3357151	34,12
43	189423	500	0,00264	0,00230	0,99770	96772	223	3260182	33,19
44	189977	457	0,00241	0,00262	0,99738	96549	253	3163410	32,26
45	192507	525	0,00273	0,00297	0,99703	96296	286	3066861	31,35
46	192095	681	0,00355	0,00335	0,99665	96010	321	2970565	30,44
47	193007	727	0,00377	0,00381	0,99619	95689	365	2874555	29,54
48	198416	876	0,00441	0,00431	0,99569	95324	411	2778866	28,65
49	203761	972	0,00477	0,00476	0,99524	94913	451	2683542	27,77
50	211103	1094	0,00518	0,00529	0,99471	94462	500	2588629	26,90
51	210871	1242	0,00589	0,00578	0,99422	93962	543	2494167	26,04
52	208940	1302	0,00623	0,00651	0,99349	93419	608	2400205	25,19
53	209401	1529	0,00730	0,00718	0,99282	92811	667	2306786	24,35
54	217592	1739	0,00799	0,00794	0,99206	92144	732	2213975	23,53
55	231150	2048	0,00886	0,00873	0,99127	91412	798	2121831	22,71
56	242422	2314	0,00955	0,00950	0,99050	90614	860	2030419	21,91
57	246434	2472	0,01003	0,01031	0,98969	89754	925	1939805	21,11
58	247206	2815	0,01139	0,01118	0,98882	88829	994	1850051	20,33
59	233046	2869	0,01231	0,01214	0,98786	87835	1066	1761222	19,55
60	226380	2919	0,01289	0,01314	0,98686	86769	1140	1673387	18,79
61	228841	3309	0,01446	0,01419	0,98581	85629	1215	1586618	18,03
62	216390	3298	0,01524	0,01530	0,98470	84414	1291	1500989	17,28
63	203241	3383	0,01665	0,01662	0,98338	83123	1382	1416575	16,54
64	179225	3254	0,01816	0,01807	0,98193	81741	1477	1333452	15,81
65	143929	2790	0,01938	0,01966	0,98034	80264	1578	1251711	15,10
66	130195	2865	0,02201	0,02137	0,97863	78686	1682	1171447	14,39
67	136012	3174	0,02334	0,02317	0,97683	77004	1784	1092761	13,69
68	138272	3396	0,02456	0,02526	0,97474	75220	1900	1015757	13,00
69	143320	4053	0,02828	0,02763	0,97237	73320	2026	940537	12,33
70	149727	4554	0,03042	0,03070	0,96930	71294	2189	867217	11,66
71	149750	5079	0,03392	0,03403	0,96597	69105	2352	795923	11,02
72	145604	5516	0,03788	0,03787	0,96213	66753	2528	726818	10,39
73	144249	6108	0,04234	0,04230	0,95770	64225	2717	660065	9,78
74	140589	6737	0,04792	0,04721	0,95279	61508	2904	595840	9,19
75	135963	7145	0,05255	0,05305	0,94695	58604	3109	534332	8,62
76	132154	7769	0,05879	0,05949	0,94051	55495	3302	475728	8,07
77	125424	8260	0,06586	0,06671	0,93329	52193	3482	420233	7,55
78	117020	8701	0,07435	0,07440	0,92560	48711	3624	368040	7,06
79	106608	9008	0,08450	0,08321	0,91679	45087	3752	319329	6,58
80	96659	8948	0,09257	0,09294	0,90706	41335	3842	274242	6,13
81	85985	8879	0,10326	0,10270	0,89730	37493	3850	232907	5,71
82	73359	8274	0,11279	0,11348	0,88652	33643	3818	195414	5,31
83	62505	8069	0,12909	0,12539	0,87461	29825	3740	161771	4,92
84	52752	7398	0,14024	0,13855	0,86145	26085	3614	131946	4,56
85	43324	6632	0,15308	0,15309	0,84691	22471	3440	105861	4,21
86	35207	5861	0,16647	0,16916	0,83084	19031	3219	83390	3,88
87	28230	5078	0,17988	0,18692	0,81308	15812	2956	64359	3,57
88	21752	4321	0,19865	0,20654	0,79346	12856	2655	48547	3,28
89	16634	3575	0,21492	0,22821	0,77179	10201	2328	35691	3,00

Nastavak Priloga 2.

Detaljne tablice smrtnosti za Republiku Srbiju za period 2010.–2012., ukupno stanovništvo

90	12333	2787	0,22598	0,25217	0,74783	7873	1985	25490	2,74
91	8011	2126	0,26539	0,27864	0,72136	5888	1641	17617	2,49
92	3813	1028	0,26960	0,30788	0,69212	4247	1308	11729	2,26
93	1961	507	0,25854	0,34020	0,65980	2939	1000	7482	2,05
94	1429	409	0,28621	0,37591	0,62409	1939	729	4543	1,84
95	1078	351	0,32560	0,41537	0,58463	1210	503	2604	1,65
96	1041	338	0,32469	0,45896	0,54104	707	324	1394	1,47
97	803	295	0,36737	0,50714	0,49286	383	194	687	1,29
98	526	188	0,35741	0,56037	0,43963	189	106	304	1,11
99	321	108	0,33645	0,61919	0,38081	83	51	115	0,88
100	...	...	...	1,00000	...	32	32	32	0,50
Σ	14590051	206418	0,01415	...	...	...	...	...	...

PRILOG 3.

Detaljne tablice smrtnosti za Republiku Srbiju za period 2010.–2012., muško stanovništvo

Старост / *Age*	Број посматраних становника *Number of observed population*	Број умрлих *Number of deaths*	Сирова вероватноћа смрти *Raw probability of death*	Изравната вероватноћа смрти *Smoothed probability of death*	Вероватноћа доживљења *Probability of surviving*	Број живих *Number of surviving*	Број мртвих *Number of deaths*	Збир бројева живих *Total number of person-years*	Средње трајање живота *Life expectancy*
x	L_x	T_x	q'_x	q_x	p_x	l_x	d_x	N_x	$\overset{0}{e}_x$
0	68914	481	0,00698	0,00698	0,99302	100000	698	7246319	71,96
1	69476	38	0,00055	0,00055	0,99945	99302	54	7146319	71,46
2	69278	21	0,00030	0,00030	0,99970	99248	30	7047017	70,50
3	68570	13	0,00019	0,00019	0,99981	99218	19	6947769	69,52
4	69013	5	0,00007	0,00007	0,99993	99199	7	6848551	68,54
5	70755	11	0,00016	0,00010	0,99990	99192	10	6749352	67,54
6	72498	6	0,00008	0,00009	0,99991	99182	9	6650160	66,55
7	73919	7	0,00009	0,00009	0,99991	99173	9	6550978	65,56
8	74140	7	0,00009	0,00009	0,99991	99164	9	6451805	64,56
9	74183	8	0,00011	0,00011	0,99989	99155	11	6352641	63,57
10	72041	10	0,00014	0,00012	0,99988	99144	12	6253486	62,57
11	70015	9	0,00013	0,00013	0,99987	99132	13	6154342	61,58
12	71185	12	0,00017	0,00018	0,99982	99119	18	6055210	60,59
13	73474	19	0,00026	0,00021	0,99979	99101	21	5956091	59,60
14	77184	19	0,00025	0,00028	0,99972	99080	28	5856990	58,61
15	81591	22	0,00027	0,00034	0,99966	99052	34	5757910	57,63
16	83632	35	0,00042	0,00038	0,99962	99018	37	5658858	56,65
17	84387	36	0,00043	0,00048	0,99952	98981	47	5559840	55,67
18	85095	48	0,00056	0,00055	0,99945	98934	55	5460859	54,70
19	86422	61	0,00071	0,00066	0,99934	98879	65	5361925	53,73
20	88054	66	0,00075	0,00071	0,99929	98814	70	5263046	52,76
21	88248	64	0,00073	0,00071	0,99929	98744	70	5164232	51,80
22	91357	55	0,00060	0,00074	0,99926	98674	73	5065488	50,84
23	94769	78	0,00082	0,00075	0,99925	98601	74	4966814	49,87
24	94768	72	0,00076	0,00082	0,99918	98527	81	4868213	48,91
25	95607	93	0,00097	0,00088	0,99912	98446	87	4769686	47,95
26	98841	87	0,00088	0,00090	0,99910	98359	89	4671240	46,99
27	101181	100	0,00099	0,00093	0,99907	98270	91	4572881	46,03
28	100684	86	0,00085	0,00100	0,99900	98179	99	4474611	45,08
29	99422	109	0,00110	0,00102	0,99898	98080	100	4376432	44,12
30	100107	109	0,00109	0,00112	0,99888	97980	110	4278352	43,17
31	101232	118	0,00117	0,00120	0,99880	97870	117	4180372	42,21
32	101899	133	0,00131	0,00129	0,99871	97753	126	4082502	41,26
33	102746	155	0,00151	0,00138	0,99862	97627	135	3984749	40,32
34	103056	135	0,00131	0,00143	0,99857	97492	140	3887122	39,37
35	103174	163	0,00158	0,00148	0,99852	97352	144	3789630	38,43
36	101585	152	0,00150	0,00153	0,99847	97208	148	3692278	37,48
37	99808	156	0,00156	0,00161	0,99839	97060	156	3595070	36,54
38	97767	178	0,00182	0,00171	0,99829	96904	166	3498010	35,60
39	96347	171	0,00177	0,00188	0,99812	96738	182	3401106	34,66

Nastavak Priloga 3.

Detaljne tablice smrtnosti za Republiku Srbiju za period 2010.–2012., muško stanovništvo

40	95487	196	0,00205	0,00198	0,99802	96556	192	3304368	33,72
41	94649	197	0,00208	0,00230	0,99770	96364	222	3207812	32,79
42	94194	246	0,00261	0,00261	0,99739	96142	250	3111448	31,86
43	93814	319	0,00340	0,00300	0,99700	95892	288	3015306	30,94
44	94019	305	0,00324	0,00342	0,99658	95604	327	2919414	30,04
45	95180	335	0,00352	0,00391	0,99609	95277	373	2823810	29,14
46	95013	435	0,00458	0,00439	0,99561	94904	417	2728533	28,25
47	95225	481	0,00505	0,00509	0,99491	94487	481	2633629	27,37
48	97657	580	0,00594	0,00584	0,99416	94006	549	2539142	26,51
49	99940	663	0,00663	0,00650	0,99350	93457	608	2445136	25,66
50	103345	736	0,00712	0,00719	0,99281	92849	668	2351679	24,83
51	103481	808	0,00781	0,00801	0,99199	92181	739	2258830	24,00
52	102680	889	0,00866	0,00888	0,99112	91442	812	2166649	23,19
53	102546	1033	0,01007	0,00983	0,99017	90630	891	2075207	22,40
54	106128	1162	0,01095	0,01083	0,98917	89739	972	1984577	21,61
55	112997	1340	0,01186	0,01187	0,98813	88767	1054	1894838	20,85
56	118547	1547	0,01305	0,01291	0,98709	87713	1132	1806071	20,09
57	120158	1654	0,01377	0,01412	0,98588	86581	1223	1718358	19,35
58	120164	1854	0,01543	0,01539	0,98461	85358	1313	1631777	18,62
59	112745	1942	0,01722	0,01671	0,98329	84045	1405	1546419	17,90
60	108744	1901	0,01748	0,01809	0,98191	82640	1495	1462374	17,20
61	109052	2185	0,02004	0,01960	0,98040	81145	1590	1379734	16,50
62	102478	2189	0,02136	0,02106	0,97894	79555	1676	1298589	15,82
63	95681	2132	0,02228	0,02270	0,97730	77879	1768	1219034	15,15
64	83880	2068	0,02465	0,02455	0,97545	76111	1869	1141155	14,49
65	66698	1762	0,02642	0,02662	0,97338	74242	1976	1065044	13,85
66	59798	1791	0,02995	0,02876	0,97124	72266	2078	990802	13,21
67	62070	1902	0,03064	0,03072	0,96928	70188	2156	918536	12,59
68	62670	2021	0,03225	0,03320	0,96680	68032	2259	848348	11,97
69	64457	2345	0,03638	0,03582	0,96418	65773	2356	780316	11,36
70	67152	2641	0,03933	0,03909	0,96091	63417	2479	714543	10,77
71	66243	2831	0,04274	0,04292	0,95708	60938	2615	651126	10,18
72	63197	2950	0,04668	0,04705	0,95295	58323	2744	590188	9,62
73	62075	3172	0,05110	0,05179	0,94821	55579	2878	531865	9,07
74	60333	3538	0,05864	0,05709	0,94291	52701	3009	476286	8,54
75	57878	3629	0,06270	0,06314	0,93686	49692	3138	423585	8,02
76	55452	3841	0,06927	0,07009	0,92991	46554	3263	373893	7,53
77	51599	4016	0,07783	0,07681	0,92319	43291	3325	327339	7,06
78	47329	3998	0,08447	0,08576	0,91424	39966	3428	284048	6,61
79	43019	4064	0,09447	0,09457	0,90543	36538	3455	244082	6,18
80	38503	4053	0,10526	0,10419	0,89581	33083	3447	207544	5,77
81	33539	3851	0,11482	0,11433	0,88567	29636	3388	174461	5,39
82	28302	3536	0,12494	0,12546	0,87454	26248	3293	144825	5,02
83	23569	3305	0,14023	0,13768	0,86232	22955	3160	118577	4,67
84	19138	2821	0,14740	0,15108	0,84892	19795	2991	95622	4,33

Nastavak Priloga 3.

Detaljne tablice smrtnosti za Republiku Srbiju za period 2010.–2012., muško stanovništvo

85	15285	2458	0,16081	0,16578	0,83422	16804	2786	75827	4,01
86	12104	2177	0,17986	0,18192	0,81808	14018	2550	59023	3,71
87	9548	1812	0,18978	0,19963	0,80037	11468	2289	45005	3,42
88	7365	1549	0,21032	0,21906	0,78094	9179	2011	33537	3,15
89	5587	1196	0,21407	0,24038	0,75962	7168	1723	24358	2,90
90	4137	968	0,23399	0,26378	0,73622	5445	1436	17190	2,66
91	2627	775	0,29501	0,28946	0,71054	4009	1160	11745	2,43
92	1216	352	0,28947	0,31763	0,68237	2849	905	7736	2,22
93	701	189	0,26961	0,34855	0,65145	1944	678	4887	2,01
94	480	146	0,30417	0,38248	0,61752	1266	484	2943	1,82
95	322	102	0,31677	0,41971	0,58029	782	328	1677	1,64
96	338	117	0,34615	0,46057	0,53943	454	209	895	1,47
97	252	96	0,38095	0,50540	0,49460	245	124	441	1,30
98	160	59	0,36875	0,55460	0,44540	121	67	196	1,12
99	102	32	0,31373	0,60858	0,39142	54	33	75	0,89
100	...	...	...	1,00000	...	21	21	21	0,50
Σ	7107473	104440	0,01469	...	...	...	...	...	...

PRILOG 4.

Detaljne tablice smrtnosti za Republiku Srbiju za period 2010.–2012., žensko stanovništvo

Старост / *Age*	Број посматраних становника *Number of observed population*	Број умрлих *Number of deaths*	Сирова вероватноћа смрти *Raw probability of death*	Изравната вероватноћа смрти *Smoothed probability of death*	Вероватноћа доживљења *Probability of surviving*	Број живих *Number of surviving*	Број мртвих *Number of deaths*	Збир бројева живих *Total number of person-years*	Средње трајање живота *Life expectancy*
x	L_x	T_x	q'_x	q_x	p_x	l_x	d_x	N_x	$\overset{0}{e}_x$
0	64988	370	0,00569	0,00569	0,99431	100000	569	7762123	77,12
1	65541	21	0,00032	0,00032	0,99968	99431	32	7662123	76,56
2	64576	14	0,00022	0,00022	0,99978	99399	22	7562692	75,58
3	64239	8	0,00012	0,00012	0,99988	99377	12	7463293	74,60
4	65332	9	0,00014	0,00014	0,99986	99365	14	7363916	73,61
5	67416	12	0,00018	0,00012	0,99988	99351	11	7264551	72,62
6	68634	4	0,00006	0,00011	0,99989	99340	11	7165200	71,63
7	69579	6	0,00009	0,00009	0,99991	99329	9	7065860	70,64
8	70048	13	0,00019	0,00013	0,99987	99320	13	6966531	69,64
9	70171	10	0,00014	0,00015	0,99985	99307	15	6867211	68,65
10	68248	10	0,00015	0,00016	0,99984	99292	16	6767904	67,66
11	65837	17	0,00026	0,00017	0,99983	99276	17	6668612	66,67
12	66917	8	0,00012	0,00018	0,99982	99259	18	6569336	65,68
13	69604	10	0,00014	0,00018	0,99982	99241	18	6470077	64,70
14	72724	13	0,00018	0,00020	0,99980	99223	19	6370836	63,71
15	76420	20	0,00026	0,00022	0,99978	99204	22	6271613	62,72
16	78399	22	0,00028	0,00023	0,99977	99182	23	6172409	61,73
17	79267	16	0,00020	0,00022	0,99978	99159	22	6073227	60,75
18	80483	8	0,00010	0,00024	0,99976	99137	23	5974068	59,76
19	82548	25	0,00030	0,00024	0,99976	99114	23	5874931	58,77
20	84006	26	0,00031	0,00027	0,99973	99091	27	5775817	57,79
21	84250	22	0,00026	0,00028	0,99972	99064	27	5676726	56,80
22	86897	27	0,00031	0,00030	0,99970	99037	30	5577662	55,82
23	89750	28	0,00031	0,00030	0,99970	99007	30	5478625	54,84
24	90542	25	0,00028	0,00032	0,99968	98977	32	5379618	53,85
25	91665	33	0,00036	0,00032	0,99968	98945	32	5280641	52,87
26	94913	25	0,00026	0,00036	0,99964	98913	36	5181696	51,89
27	97181	44	0,00045	0,00041	0,99959	98877	40	5082783	50,91
28	96631	51	0,00053	0,00044	0,99956	98837	43	4983906	49,93
29	96103	36	0,00037	0,00044	0,99956	98794	43	4885069	48,95
30	96868	43	0,00044	0,00046	0,99954	98751	45	4786275	47,97
31	97524	50	0,00051	0,00047	0,99953	98706	47	4687524	46,99
32	98038	49	0,00050	0,00052	0,99948	98659	51	4588818	46,01
33	99077	52	0,00052	0,00056	0,99944	98608	55	4490159	45,04
34	100374	64	0,00064	0,00060	0,99940	98553	59	4391551	44,06
35	101116	65	0,00064	0,00066	0,99934	98494	65	4292998	43,09
36	99527	74	0,00074	0,00075	0,99925	98429	74	4194504	42,12
37	98217	82	0,00083	0,00084	0,99916	98355	83	4096075	41,15
38	97401	85	0,00087	0,00094	0,99906	98272	93	3997720	40,18
39	96076	117	0,00122	0,00108	0,99892	98179	106	3899448	39,22

Nastavak Priloga 4.

Detaljne tablice smrtnosti za Republiku Srbiju za period 2010.–2012., žensko stanovništvo

40	94682	102	0,00108	0,00120	0,99880	98073	118	3801269	38,26
41	94346	141	0,00149	0,00135	0,99865	97955	132	3703196	37,31
42	95175	122	0,00128	0,00147	0,99853	97823	144	3605241	36,35
43	95609	181	0,00189	0,00161	0,99839	97679	158	3507418	35,41
44	95958	152	0,00158	0,00184	0,99816	97521	179	3409739	34,46
45	97327	190	0,00195	0,00205	0,99795	97342	199	3312218	33,53
46	97082	246	0,00253	0,00233	0,99767	97143	226	3214876	32,59
47	97782	246	0,00252	0,00256	0,99744	96917	248	3117733	31,67
48	100759	296	0,00294	0,00284	0,99716	96669	274	3020816	30,75
49	103821	309	0,00298	0,00311	0,99689	96395	300	2924147	29,84
50	107758	358	0,00332	0,00345	0,99655	96095	332	2827752	28,93
51	107390	434	0,00404	0,00374	0,99626	95763	358	2731657	28,03
52	106260	413	0,00389	0,00422	0,99578	95405	403	2635894	27,13
53	106855	496	0,00464	0,00465	0,99535	95002	442	2540489	26,24
54	111464	577	0,00518	0,00517	0,99483	94560	489	2445487	25,36
55	118153	708	0,00599	0,00572	0,99428	94071	539	2350927	24,49
56	123875	767	0,00619	0,00618	0,99382	93532	578	2256856	23,63
57	126276	818	0,00648	0,00668	0,99332	92954	621	2163324	22,77
58	127042	961	0,00756	0,00726	0,99274	92333	671	2070370	21,92
59	120301	927	0,00771	0,00787	0,99213	91662	722	1978037	21,08
60	117636	1018	0,00865	0,00851	0,99149	90940	774	1886375	20,24
61	119789	1124	0,00938	0,00926	0,99074	90166	835	1795435	19,41
62	113912	1109	0,00974	0,01016	0,98984	89331	908	1705269	18,59
63	107560	1251	0,01163	0,01117	0,98883	88423	988	1615938	17,78
64	95345	1186	0,01244	0,01233	0,98767	87435	1078	1527515	16,97
65	77231	1028	0,01331	0,01353	0,98647	86357	1168	1440080	16,18
66	70397	1074	0,01526	0,01508	0,98492	85189	1285	1353723	15,39
67	73942	1272	0,01720	0,01675	0,98325	83904	1406	1268534	14,62
68	75602	1375	0,01819	0,01873	0,98127	82498	1545	1184630	13,86
69	78863	1708	0,02166	0,02091	0,97909	80953	1693	1102132	13,11
70	82575	1913	0,02317	0,02383	0,97617	79260	1889	1021179	12,38
71	83507	2248	0,02692	0,02705	0,97295	77371	2093	941919	11,67
72	82407	2566	0,03114	0,03085	0,96915	75278	2323	864548	10,98
73	82174	2936	0,03573	0,03513	0,96487	72955	2563	789270	10,32
74	80256	3199	0,03986	0,03982	0,96018	70392	2803	716315	9,68
75	78085	3516	0,04503	0,04552	0,95448	67589	3077	645923	9,06
76	76702	3928	0,05121	0,05189	0,94811	64512	3347	578334	8,46
77	73825	4244	0,05749	0,05907	0,94093	61165	3613	513822	7,90
78	69691	4703	0,06748	0,06684	0,93316	57552	3847	452657	7,37
79	63589	4944	0,07775	0,07575	0,92425	53705	4068	395105	6,86
80	58156	4895	0,08417	0,08589	0,91411	49637	4263	341400	6,38
81	52446	5028	0,09587	0,09539	0,90461	45374	4328	291763	5,93
82	45057	4738	0,10516	0,10593	0,89407	41046	4348	246389	5,50
83	38936	4764	0,12235	0,11764	0,88236	36698	4317	205343	5,10
84	33614	4577	0,13616	0,13065	0,86935	32381	4231	168645	4,71

Nastavak Priloga 4.

Detaljne tablice smrtnosti za Republiku Srbiju za period 2010.–2012., žensko stanovništvo

85	28039	4174	0,14886	0,14509	0,85491	28150	4084	136264	4,34
86	23103	3684	0,15946	0,16113	0,83887	24066	3878	108114	3,99
87	18682	3266	0,17482	0,17895	0,82105	20188	3613	84048	3,66
88	14387	2772	0,19267	0,19873	0,80127	16575	3294	63860	3,35
89	11047	2379	0,21535	0,22070	0,77930	13281	2931	47285	3,06
90	8196	1819	0,22194	0,24510	0,75490	10350	2537	34004	2,79
91	5384	1351	0,25093	0,27220	0,72780	7813	2127	23654	2,53
92	2597	676	0,26030	0,30229	0,69771	5686	1719	15841	2,29
93	1260	318	0,25238	0,33571	0,66429	3967	1332	10155	2,06
94	949	263	0,27713	0,37283	0,62717	2635	982	6188	1,85
95	756	249	0,32937	0,41405	0,58595	1653	684	3553	1,65
96	703	221	0,31437	0,45982	0,54018	969	446	1900	1,46
97	551	199	0,36116	0,51066	0,48934	523	267	931	1,28
98	366	129	0,35246	0,56711	0,43289	256	145	408	1,09
99	219	76	0,34703	0,62981	0,37019	111	70	152	0,87
100	...	...	...	1,00000	...	41	41	41	0,50
Σ	7482578	101978	0,01363	...	...	...	...	...	...

CIP – Каталогизација у публикацији –
Народна библиотека Србије, Београд

005.334(075.8)(0.034.2)

ПАНИЋ, Марија, 1985-
Upravljanje rizikom [Elektronski izvor] : zbirka zadataka sa izvodima iz teorije / Marija Panić. - Bor : Tehnički fakultet Univerziteta u Beogradu, 2017 (Zaječar : Happy). - tekst, slika. - 1 elektronski optički disk (CD-ROM) ; 12 cm

Tiraž 100. - Bibliografija.

ISBN 978-86-6305-065-5

а) Управљање ризиком - Задаци
COBISS.SR-ID 246503436