Sadržaj

TEORIJA IGARA

TEORIJA IGARA

Život obiluje situacijama u kojima je potrebno donositi odluke. U nekim slučajevima, posledice odluke zavise isključivo od jedne strane koja donosi odluku. Na primer, programer donosi odluku u kojem programskom jeziku će kodirati algoritam koji rešava dati problem. Međutim, često posledice odluka ne zavise samo od jedne strane već i od interakcije sa odlukama koje donose druge strane, tako da ishod odluke jedne strane zavisi i od odluke druge ili drugih strana. Često je slučaj da se ovakve situacije karakterišu i suprotstavljenim-antagonističkim interesima učesnika u odlučivanju, tj. kažemo da su strane koje donose odluke u konflikgu. U igri šaha, rezultat igre ne zavisi samo od poteza jednog igrača već i od poteza drugog a njihovi interesi su konfliktni, jer svaka strana želi da pobedi drugu.

Ovakav slučaj neizvesnosti u odlučivanju nazivamo *igrom* a oblast operacionih istraživanja koja se bavi analizom ovakvih problema i nalaženjem optimalnih rešenja se naziva *teorijom igara*.

Pod teorijom igara se podrazumeva matematička teorija procesa donošenja odluka protivnika (učesnika, igrača) koji su u konfliktu (sukobu) ili su uključeni u konkurentske uslove. Pod pojmom igre podrazumeva se model realne konfliktne situacije. Igri se mogu dodati odgovarajuća pravila, čime se definišu pravila ponašanje učesnika u igri, a cilj teorije igara je da se egzaktnim matematičkim algoritmom analizira konfliktna situacija i odredi razumno ponašanje igrača i toku konflikta, tj. da se odrede optimalne strategije za svakog od učesnika u igri.

1. Matematičke igre

1.1. Čovek i igra

Pojam "igra" se poistovećuje sa razonodom i zabavom, tj. sa aktivnostima koje se obavljaju dobrovoljno i ne smatraju se obavezama. Igre su nastale zbog potrebe za telesnom i duhovnom razonodom, i pruža zadovoljstvo slično onome u procesu stvaranja. Takođe, to je slobodna delatnost koja nije neposredno nametnuta egzistencijalnim problemima. Ona osmišljava naše postojanje koje osiguravamo radom. Međutim, igra ne samo da zahteva, već i podstiče dosetljivost i istraživački duh. Kroz igru čovek uči da shvati određene odnose i da stvara nove. Na taj način, igra doprinosi razvoju civilizacije.

Žan Žak Ruso je smatrao da je poštovanje pravila igre veoma važno za vaspitanje deteta. Deni Didro u svom delu "Zakoni prirode" kaže: "Nisam siguran da li postoji veza između nadarenosti za igru i genija matematičara; međutim, između igre i matematike postoje brojne veze".

Prva knjiga koja spada u žanr zanimljive matematike objavljena je 1612. godine. Nemački matematčar Ernst Zermelo je 1921. godine dokazao važna tvrđenja o postojanju pobedničkih strategija. John von Neumann je još 1928. godine definisao i upotrebio neke pojmove iz teorije igara. Međutim, tada je pojava nove teorije ostala izvan domašaja stručne javnosti i veoma malo je učinjeno na ovom području do pojave pomenute knjige. U toj knjizi se prvi put pojavljuje zadatak sa brojevima. Temelje teorije igara postavili su John von Neumann i Oscar Morgenstern 1944. godine u knjizi "Theory of Games and Economic Behavior". Tada su konačno date matematičke osnove teorije, definisani osnovni pojmovi strategije i vrednosti igre, formulisani metodi za nalaženje optimalnih strategija i ukazano na mogućnost primene ove teorije u ekonomskim istraživanjima. Dž. Dantzig je 1951. godine pokazao vezu između linearnog programiranja i teorije igara. Preciznije, tada je dokazano da se jedan specijalni slučaj igre, "igra sa zbirom nula", može svesti i rešavati kao problem linearnog programiranja. Od tada je počelo da raste interesovanje za razvoj i primenu teorije igara. Postalo je očigledno da logička struktura teorije igara krije u sebi mnogo mogućnosti u pogledu donošenja odluka u privredi.

1.2. Osnovni pojmovi i principi teorije igara

Osnovni pojmovi koji karakterišu teoriju igara su:

- *igrači*: predstavljaju strane u konfliktu;
- *igra*: model realnog ponašanja učesnika u igri;
- *dobitak* (*gubitak*): predstavlja rezultat igre;
- *igra sa nultom sumom*: slučaj kada jedna strana dobija onoliko koliko druga strana gubi;
- skup *strategija* (*poteza*, *alternativa*) predstavlja ponašanje svakog od igrača (to je plan razvoja igre);
- *optimalna strategija*: to je strategija koja pri višestrukom ponavljanju igre obezbeđuje igraču maksimalno mogući srednji dobitak, odnosno minimalno mogući srednji gubitak.

Kriterijumi, koji se koriste za izbor optimalne strategije mogu biti mnogobrojni:

- *min max*/*max min* kriterijum (Wald-ov; pesimistički);
- *max max*/*min min* kriterijum (optimistički);
- *Hurwitz*-ov kriterijum (metod optimizma-pesimizma);
- *Laplace*-ov kriterijum (princip nedovoljnog razloga);
- *Savage*-ov kriterijum; (metod *minimax* kajanja);
- Kriterijum *očekivane vrednosti*;
- *Bernulijev* kriterijum; itd.

Prvih pet, pobrojanih, kriterijuma se primenjuju za uslove neizvesnosti, a kriterijum očekivane vrednosti za uslove rizika.

Min max (*max min*) kriterijum je osnovni kriterijum koji se koristi u teoriji igara. Naziva se i Waldov kriterijum prema A. Waldu koji je utvrdio pravilo na kome se zasniva ovaj kriterijum: "***Ako su mi nepoznata stanja prirode, zauzeću najoprezniji stav***." Ovaj kriterijum podržava oprezan i pesimistički stav, pa bez ulaženja u rizik teži da ograniči mogući gubitak.

Optimalna strajegija po ovom kriterijumu je takva strategija koja, pri višestrukom ponavljanju igre, obezbeđuje igraču maksimalno mogući srednji dobitak, odnosno minimalno mogući srednji gubitak.

Polazeći od ovakvog pravila, mogu da se definišu sledeći principi:

- Igrač bira svoje ponašanje tako da mu dobitak u igri bude maksimalan uz najnepovoljnije pretpostavljeno ponašanje protivnika. Ovakav postupak predstavlja zapravo izbor najopreznije strategije, a sam princip se naziva ***maxmin*** princip.
- Igrač može da bira svoje ponašanje tako da mu gubici budu minimalni pri, po njemu, najnepovoljnijem delovanju protivnika, gde se ovakav princip naziva ***minmax*** princip.

Ovi principi ukazuju na jedan oprezan pristup što razlikuje teoriju igara od kocke.

Termin "igre" se koristi kao naučna metafora za široki krug interakcija ljudi u kojima ishod interakcije zavisi od međusobnih strategija dve ili više strana koje imaju konfliktne interese. Osnovna pitanja koja se postavljaju u teoriji igara su:

- Šta to znači izabrati "racionalnu" strategiju, kad ishod strategije zavisi od strategije koju bira protivnik i kad je informacija nepotpuna?
- Da li je racionalno u igrama koje dozvoljavaju i uzajamni dobitak (ili uzajamni gubitak) obe strane, uzajamno sarađivati da bi se obezbedio najveći uzajamni dobitak (ili ostvario najmanji uzajamni gubitak) ili je racionalno delovati agresivno, bez obzira na mogućnost uzajamnog dobitka ili gubitka?
- Ako je ponekad racionalno igrati agresivno, koje su to situacije u kojima se to isplati, a u kojim situacijama je racionalno sarađivati?
- Da li iz procesa interakcije spontano nastaju moralna pravila saradnje racionalnih egoista?
- Kakvo je realno ponašanje ljudi u odnosu na "racionalne" recepte koje nudi teorija igara?
- Ako je ono različito, u kom je to smeru? Da li su ljudi više kooperativni nego što to predlaže teorija igara? Ili su više agresivni? Ili oboje?

Teorija igara se može koristiti za analizu hazardnih igara, kao što je poker, ili sportskih igara, kao što je fudbal, ali i nekih pojava koje nisu igre u prethodnom smislu, kao što su tržišna konkurencija, trka u naoružanju, ekološki problemi i neke sasvim egzotične situacije, kao što je pitanje saznanja da li postoje natprirodna bića i mnoge druge. Svaki od igrača ima mogućnost izbora odgovarajuće strategije, čiji ishod zavisi od strategija koju biraju i ostali učesnici u igri. Prema tome, problem teorije igara je matematički problem maksimizacije dobitka grupe ili jednog igrača, što predstavlja racionalno rešenje igre.

Za praktično korišćenje teorije igara interesantno je ispitati veze sa ekonomskom teorijom. Ključna veza između teorije igara i neoklasične ekonomije je koncept racionalnog ponašanja. Neoklasična ekonomija je bazirana na pretpostavci da su ljudska bića absolutno racionalna u odnosu na mogućnost ekonomskog izbora. Drugim rečima, svaki pojedinac teži da u datoj situaciji maksimizira svoj dobitak - profit ili neku drugu subjektivnu korist.

Koncept racionalnog pojedinca koji bira svoje strategije tako da maksimizira očekivanu korist je svakako aproksimacija realnog ponašanja ljudskih bića, koje može da ponekad bude i iracionalno i zavisi od psiholoških karakteristika svake pojedinačne osobe. Međutim, ova aproksimacija se pokazuje kao dovoljno dobra da objasni, u proseku, reakcije ljudi suočenih sa konkretnim ekonomskim izborom.

Pretpostavka racionalnosti ima dvostruku ulogu u istraživanjima alokacije resursa. Prvo, ona sužava skup mogućih rešenja, jer apsolutno racionalno ponašanje je više podložno analizi nego iracionalno i drugo, ona pruža kriterijum za ocenu efikasnosti ekonomskih sistema. Ukoliko ekonomski sistem omogućava da jedni gube više nego što drugi dobijaju (troškovi veći od koristi), tada nešto nije u redu sa takvim sistemom, kao što je to slučaj sa zagađenjem čovekove okoline, preteranom eksploatacijom prirodnih resursa, nedovoljnim ulaganjima u naučna istraživanja i slično.

U neoklasičnoj ekonomiji, racionalni pojedinac deluje u okviru specifičnog sistema institucija, kao što su privatna svojina, novac i slobodno tržište. Posledica toga je da pojedinac ne mora da analizira svoju interakciju sa ostalim pojedincima, već jedino svoju sopstvenu poziciju i “tržišne uslove”. Kad god je konkurencija ograničena (ali ne postoji monopol), ili privatna svojina nije dobro pravno regulisana, ne može se primeniti neoklasična ekonomija. Teorija igara je baš namenjena za rešavanje ovakvih situacija, da obezbedi teoriju ekonomskog ponašanja kada pojedinci interaguju direktno, a ne preko “mehanizma tržišta”.

1.3. Neizvesnost igre

Neizvesnost rezultata igre proističe iz tri osnovna uzroka:

- Pravila igre su takva da postoji izuzetno veliki broj varijanti njenog odvijanja, tako da je nemoguće tačno predvideti rezultat igre. Ovu vrstu izvora neizvesnosti nazivamo kombinatornom, a igre, gde je ovo osnovni uzrok neizvesnosti rezultata - kombinatornim igrama. Tipični primer ove vrste igara je igra šaha. Pojavom računara, ovu vrstu igara je moguće rešavati tako da se definiše niz dobitnih kombinacija i u principu dobije zadovoljavajuće rešenje.

- Drugi izvor neizvesnosti je prisustvo slučajnih faktora. Igre kod koji je ovo dominantni uzrok neizvesnosti se nazivaju hazardnim, kao što su razne igre kockom, rulet i slično.
- Treći izvor neizvesnosti se nalazi u odsustvu informacija o mogućim akcijama protivnika odnosno o njegovoj strategiji. Igre ovog tipa se nazivaju strateškim.

1.4. Podela igara

Teorija igara se primenjuje pri istraživanju konfliktnih situacija koje nastaju iz suprotnih interesa učesnika u igri. Zato se za teoriju igara kaže da je to primenjena grana matematike koja je postavila osnove i okvire analitičke interpretacije problema odlučivanja u konfliktnim situacijama. Ima mnogo primera u različitim oblastima života koji se mogu posmatrati i izučavati kao konfliktne situacije. Dobar broj ekonomskih problema iz oblasti tržišnih – konkurentskih odnosa u sebi sadrže sukobe različitih interesa, pa se mogu analizirati i rešavati pomoću teorije igara.

Igra se može definisati kao skup svih pravila kojima se određuje tok igre i ponašanje igrača. Igrači koji učestvuju u igri moraju poznavati pravila igre i moraju ih se pridržavati.

Igre se mogu deliti prema različitim kriterijumima.

A. Jedan od kriterijuma za podelu matematičkih igara se bazira na prisustvu ili odsustvu elemenata slučajnosti. Polazimo od podele koja igre deli na dva bitno različita tipa: na igre *na sreću,* kod kojih igrač svojim sposobnostima ne može uticati na njihov ishod, i *strateške* igre, kod kojih na ishod igre utiče individualna sposobnost igrača. Elementi slučajnosti su naročito izraženi u hazardnim igrama, kao što su igre sa kartama ili sa kockom. Mi ćemo proučavati samo strateške igre.

B. Prema broju igrača igre se mogu deliti na igre *s jednim igračem*, igre *s dva igrača* i igre *s proizvoljnim brojem igrača*. Pojam "igrača" treba shvatiti veoma uopšteno, kao i sam pojam igre. To je broj suprotnih strana u igri (pojedinaca, grupa, konkurentskih učesnika, organizacija, armija, itd.). Ovde ćemo se baviti igrama sa dva igrača. Poznata igra na sreću u kojoj učestvuje jedno lice je igra *soliter*. U ovoj igri su podjednako značajni kako veština igrača tako i faktor igračke sreće. Najpoznatija igra sa dva igrača jeste *šah*. Igre u kojima učestvuje veći broj igrača su *poker* i *bridž*.

C. Svaki igrač pri odlučivanju ima određeni broj mogućnosti, ili alternativa, među kojima bira jednu za koju misli da je najbolja. Prema broju alternativa, koje igrač ima na raspolaganju, igre se dele na *konačne* i *beskonačne*. Igra je konačna ako ima konačan broj pozicija i ako se svaka partija te igre završava u konačan broj poteza. Mi ćemo proučavati igre u kojima svaki igrač ima na raspolaganju konačno mnogo alternativa. U vezi sa ovom podelom igara treba definisati i strategiju, kao jedan od osnovnih pojmova u teoriji igara. Svaki od igrača na početku igre ocenjuje svoje i protivnikove alternative, prosuđuje sve moguće kombinacije i bira onu koja mu se čini najboljom. Polazimo od jedne teorijske hipoteze da igrač unapred planira i odlučuje kako će igrati u pojedinim situacijama. Na taj način, svaka alternativa koju igrač bira u bilo kom trenutku igre unapred je određena. Strategija se definiše kao redosled svih odluka koje može do kraja igre da donese igrač.

D. Igre se mogu podeliti i prema tome da li igrači imaju potpunu informaciju o poziciji igre kao i o mogućim potezima u svakoj poziciji (kako svojim tako i potezima svog protivnika). Prema tom kriterijumu igre se dele na igre *sa potpunom informacijom* i na igre *sa nepotpunom informacijom*. Šah je igra sa potpunom informacijom. Bridž kao i druge kartaške igre jesu primeri igara sa nepotpunom informacijom. Ovde se izučavaju igre u kojima oba igrača raspolažu potpunom informacijom.

E. Igre se mogu deliti i prema karakteristikama cene igre, odnosno prema rezultatu igre. Svaka igra se završava određenim ishodom, koji se izražava dobicima ili nekim ocenama. Posle svakog odigravanja - izbora po jedne strategije od strane svakog igrača, vrši se obračun i plaćanje. Igrać koji gubi plaća igraču koji dobija iznos koji je određen pravilima igre. U svakom ovakvom obračunu zbir dobitaka jednog igrača jednak je zbiru plaćanja drugog igrača. Ovakve igre nazivamo igre *sa rezultatom nula* (igre sa nultim zbirom), ili antagonističke igre. Pored ovih, postoje i igre sa *nenultim zbirom*, ali mi ćemo se baviti igrama sa rezultatom nula.

Na osnovu podele igara, može se zaključiti da je oblast našeg interesovanja izučavanje strateških igara sa konačnim brojem alternativa u kojima učestvuju dva igrača koji raspolažu potpunom informacijom, i u kojima nema elemenata slučajnosti. Takve igre zadovoljavaju sledeće uslove:

- U igri učestvuje *dva* igrača (Prvi i Drugi).
- U igri postoji konačan broj pozicija, pri čemu je jedna od njih izabrana kao početna.
- Igra ima jasno definisana pravila kojima su određeni dozvoljeni (legalni) potezi igrača u svakoj poziciji.
- Prvi i Drugi igrač povlače svoje poteze naizmenično.
- Oba igrača raspolažu potpunom informacijom.
- Igra je *ravnopravna*, što znači da u svakoj poziciji mogući potezi ne zavise od toga koji je igrač na potezu. Primer igre koja nije ravnopravna je šah, zbog toga što u svakoj poziciji prvi igrač igra samo belim figurama, a drugi igrač igra samo crnim figurama.

- Igra je konačna, tj. svaka partija te igre se završava posle konačnog broja poteza, kada jedan od igrača, koji je na potezu, nema na raspolaganju legalan potez. U *normalnoj igri*, igrač koji se nađe u takvoj situaciji - gubi. U *obrnutoj igri*, igrač koji se nađe u takvoj situaciji - dobija. Igra ne može biti nerešena zbog ponavljanja poteza.
- Igre se završavaju sa rezultatom nula.

1.5. Izgubljene i dobijene pozicije

Pojam "matematičke igre" je kontradiktoran u sledećem smislu: u trenutku kada neka igra bude matematički rešena, tj. kada igra postane izračunavanje prema algoritmu, ona prestaje da bude igra. Ipak, iz istorije su poznate mnoge igre izučene u potpunosti koje nisu izgubile od svoje vitalnosti. One se igraju kao izazov onima koji su neupućeni u igru da otkriju "tajnu" pobede.

Mada se većina igara sastoji od serije poteza koje naizmenično povlače dva igrača, može se serija poteza svakog igrača redukovati na jedan jedini, tražeći od njega da definiše svoj odgovor u svakoj od mogućih pozicija, tj. da definiše svoju strategiju igre. Kod složenijih igara kakve su šah ili bridž, za sada je takva redukcija samo u domenu teorijskih, ali ne i praktičnih mogućnosti.

U mnogim igrama igrač može u određenim pozicijama da dođe do zaključka da može da pobedi bez obzira na poteze njegovog protivnika. Tada se kaže da taj igrač ima pobedničku strategiju. Važan cilj teorije igara je da okarakteriše dobijene i izgubljene pozicije, kao i da se definiše metod za nalaženje pobedničke strategije u konačnim igrama.

Razmotrimo sledeće primere iz kojih se mogu izvući određeni zaključci.

Primer 1.5.1. Na stolu se nalaze dve gomile sa po 7 žetona. Jednim potezom se uzima proizvoljan broj žetona (bar jedan), ali samo sa jedne gomile. Pobednik je igrač koji pokupi i poslednji žeton. Naći pobedničku strategiju za Drugog igrača.

Rešenje. Drugi igrač obezbeđuje pobedu koristeći simetričnu startegiju: u svakom potezu on uzima onoliko žetona koliko je u prethodnom potezu uzeo Prvi igrač, ali sa suprotne gomile. Simetrija se ovde odražava u jednakosti broja žetona na jednoj i drugoj gomili. Na taj način, Prvi igrač mora da svakim svojim potezom naruši simetriju. Kako je završna pozicija simetrična, nju može da postigne samo drugi igrač.

Primer 1.5.2. Igrači naizmenično postavljaju po jednog skakača na polja šahovske table, tako da se uzajamno ne "tuku". Gubi igrač koji ne može da povuče potez. Koji igrač ima pobedničku strategiju?

Rešenje. Pobedničku strategiju ima drugi igrač. Dovoljno je da u svakom potezu postavi skakača na polje koje je sismetrično u odnosu na polje u kome je Prvi igrač postavio poslednjeg skakača. Dva simetrična polja na tabli 8×8 su iste boje, tako da se skakači na tim poljima ne "tuku". Jasno je da Drugi igrač ima neki potez na raspolaganju sve dok Prvi igrač ima potez. Na slici I-1. je prikazan jedan od mogućih rasporeda skakača, pri čemu su brojem 1 označeni potezi Prvog igrača, a sa 2 potezi Drugog igrača.

1	2		2		1	1	1
2	1	1		1		2	
	1					1	1
1		2	1	1		2	
	1		2	2	1		2
2	2					2	
	1		2		2	2	1
2	2	2		1		1	2

Slika I-1. Jedan od mogućih rasporeda skakača

Formalno posmatrano, do rešenja igre se dolazi na taj način što su sve pozicije igre podeljene u dve kategorije. Pozicije jedne klase se nazivaju *pobedničke*, dok se pozicije druge klase nazivaju *gubitničke*. Pri tome važi i sledeće:

(1) Završna pozicija je gubitnička (u normalnoj igri gubi igrač koji je na potezu).

(2) Ne postoji potez koji iz neke gubitničke pozicije vodi u neku drugu gubitničku poziciju.

(3) Iz svake pobedničke pozicije se jednim potezom može stići u neku gubitničku poziciju.

Potez je *dobar* ako se njime igra prevodi iz dobitničke pozicije u gubitničku; u protivnom je *loš*.

U primeru 1.5.1. gubitničke pozicije su one pozicije u kojima se na obe gomile nalazi isti broj žetona.

Rešenje igre se lako može naći kada se odredi klasa izgubljenih pozicija. Tada se pobednička strategija sastoji u tome da se svakim potezom igra iz pobedničke pozicije prevede u gubitničku poziciju. S obzirom na osobinu (2), igrač iz gubitničke pozicije svojim potezom mora da igru prevede u dobitničku poziciju. Prema tome, ako je početna pozicija gubitnička (kao u primeru 1.5.1), tada Drugi igrač ima pobedničku strategiju; u protivnom, pobedničku strategiju ima Prvi igrač.

Primer 1.5.3. Na traci dužine n+1 polja su numerisana brojevima od 0 do n s leva na desno. U početnoj poziciji se žeton nalazi na polju sa brojem n. Svaki potez se sastoji u pomeranju žetona za 1, 2 ili 3 mesta ulevo. Gubi igrač koji ne može da povuče legalan potez, kada je žeton na polju 0. Za koje vrednosti broja n pobedničku strategiju ima Prvi igrač, a za koje Drugi?

Rešenje. Ako se žeton nalazi na polju 0, gubi igrač koji je na potezu. Označimo polje 0 znakom -. Ako se žeton nalazi na nekom od polja sa koga se može jednim potezom preći na polje 0, igrač na potezu će dovesti žeton na polje 0 i pobediti. Prema tome, označimo polja 1, 2 i 3 znakom +. Pozicija u polju 4 je gubitnička, jer svakim legalnim potezom igrač na potezu mora da dovede žeton na jedno od polja 1,2 ili 3, koji su označeni znakom +. Nastavljajući postupak, zaključujemo da su polja 5, 6 ili 7 dobijene pozicije za igrača na potezu, a polje 8 je izgubljena pozicija za igrača na potezu, kao što je prikazano na slici I-2.

Dakle, Drugi igrač ima pobedničku strategiju ako je broj n deljiv sa 4, a u svim ostalim slučajevima pobedničku strategiju ima Prvi igrač.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	n
-	+	+	+	-	+	+	+	-	+	+	+	+	...	$\pm$

Slika I-2. Pobedničke i gubitničke pozicije

1.6. Matematičko definisanje igre

Definicija 1.6.1. *Igra* je uređena četvorka $G = (P, v_0, P_0, S)$, čije su komponente definisane na sledeći način:

- P - konačan skup čiji su elementi pozicije igre,
- $v_0 \in P$ - početna pozicija,
- $P_0 \subseteq P$ - skup završnih pozicija igre.
- S - preslikavanje $S : P \rightarrow 2^P$, gde je 2^P partitivni skup skupa P.

Smisao definisanih pojmova je sledeći:

Za $x \in P$, $S(x)$ je skup pozicija igre G (podskup skupa P) u koje se može doći jednim potezom iz pozicije x. Ako je $y \in S(x)$, tada se piše $x \rightarrow y$, što označava dozvoljeni potez igre G kojim se igra iz pozicije x prevodi u poziciju y. Skup P_0 je skup završnih pozicija, tj. $x \in P_0 \Leftrightarrow S(x) = \phi$. U ***normalnoj igri*** je pobednik onaj igrač koji svojim potezom prevede igru u završnu poziciju. U ***obrnutoj igri***, igrač koji svojim potezom dovede igru u završnu poziciju - gubi. Najčešće se posmatraju normalne igre. Takođe, najčešće se svaka obrnuta igra može svesti na ekvivalentnu normalnu igru.

Igra može biti i bez završnih pozicija ($P_0 = \phi$). Tada se igra ne može završiti u konačnom broju poteza. S obzirom da je broj pozicija konačan, to znači da se pozicije u igri neograničeno ponavljaju. Pozicije se mogu ponavljati i u igrama sa završnim pozicijama, i tada se potezi u toj igri neograničeno ponavljaju.

Partija igre G je niz pozicija. Ukoliko je taj niz konačan, on se može napisati u obliku:

$$v_0, v_1, \ldots, v_k,$$

gde je v_0 početna pozicija a v_k završna pozicija. Tada je jedan od igrača postigao pobedu. Igra se tada može zapisati u obliku niza poteza:

$$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \ldots \rightarrow v_k,$$

pri čemu $v_i \rightarrow v_{i+1}$ predstavlja potez, $i = 0, 1, \ldots, k\text{-}1$. Ako je (u normalnoj igri) k neparan broj tada je pobednik Prvi igrač, a u protivnom - Drugi.

Definicija 1.6.2. Igra je *aciklična* ukoliko ni u jednoj partiji ne može doći do ponavljanja pozicija.

Obzirom da je broj pozicija konačan, svaka aciklična igra se mora završiti u konačnom broju poteza pobedom jednog igrača.

Definicja 1.6.3. Strategija u igri $G = (P, v_0, P_0, S)$ je preslikavanje

$$s : P \backslash P_0 \to P,$$

u kome za svako $x \in P \backslash P_0$ važi $s(x) \in S(x)$. Neki igrač u igri G primenjuje strategiju s ukoliko u svakoj poziciji v_i igra potez $v_i \to s(v_i)$.

Definicija 1.6.4. Strategija s je *pobednička* za nekog igrača ukoliko on koristeći strategiju s postiže pobedu bez obzira na strategiju njegovog protivnika.

Definicija 1.6.5. Neka su N i R podskupovi skupa pozicija P koji ispunjavaju uslove

$$N \cup R = P, \quad N \cap R = \emptyset.$$

U tom slučaju skup N predstavlja *jezgro* igre $G = (P, v_0, P_0, S)$ ako važi:

(N_1) Za bilo koje dve pozicije $u, v \in N$ ne postoji potez $u \to v$;

(N_2) Za svaku poziciju $u \in R$ postoji potez $u \to x$, gde je $x \in N$.

Pozicije koje pripadaju jezgru su *loše* za igrača na potezu. Ostale pozicije su *dobre*. Za igru $G = (P, v_0, P_0, S)$ potez $u \to v$, $u \notin N$, $v \in N$ je *dobar*. U protivnom je *loš*. Igrač koji je na potezu u lošoj poziciji nema na raspolaganju dobar potez.

2. Matrične igre

Matrične igre jesu strateške igre dva igrača sa suprotnim interesima. Igra se završava određenim ishodom, koji se izražava dobicima ili nekim ocenama. Posle svakog odigravanja - izbora po jedne strategije od strane svakog igrača, vrši se obračun i plaćanje, na osnovu matrice plaćanja. Igrač koji gubi plaća igraču koji dobija iznos koji je određen pravilima igre. Matrične igre kod kojih je u svakom ovakvom obračunu zbir dobitaka jednog igrača jednak zbiru plaćanja drugog igrača, nazivaju se igre *sa rezultatom nula* (igre sa nultim zbirom), ili *antagonističke* igre. Pored ovih, postoje i igre sa nenultim zbirom, ali mi ćemo se baviti igrama sa rezultatom nula.

2.1. Matrične igre sa nultim zbirom

Posmatramo strateške igre u kojima učestvuju samo dva igrača sa suprotnim interesima, koji mogu birati konačan broj alternativa (strategija), a igre se završavaju sa rezultatom nula. Cilj teorije igara je da se analizira konfliktna situacija i odredi razumno ponašanje igrača u toku igre, tj. da se odabere optimalna strategija igrača (strategija koja obezbeđuje maksimalno mogući srednji dobitak, odnosno minimalno mogući srednji gubitak, uz najnepovoljnije delovanje protivnika).

Pravila igre se objašnjavaju kroz sledeći primer. Igru igraju dva igrača, A i B. Igrač A ima na raspolaganju m alternativa, a igrač B ima n alternativa. Ako igrač A odabere i-tu alternativu, a igrač B j-tu, onda igra završava tako što igrač B plaća igraču A iznos a_{ij}. Broj a_{ij}, kao cena igre, može biti pozitivan, negativan i jednak nuli. Ako je broj pozitivan ($a_{ij}>0$), igrač A dobija određeni iznos $V_A(a_i,b_j)$ od igrača B; ako je broj negativan ($a_{ij}<0$), onda igrač B dobija iznos $V_B(a_i,b_j)$ od igrača A i ako je broj jednak nuli ($a_{ij}=0$), onda nema plaćanja, tj. svaki igrač ostaje na svome. Kako igrač A ima na raspolaganju m, a igrač B ima n alternativa, to igra ima ukupno $m \times n$ mogućih ishoda i odgovarajućih iznosa plaćanja V.

Šematski prikaz mogućih dobitaka igrača A od igrača B, u zavisnosti od izabranih alternativa, može se prikazati tabelarno, kao što je prikazano u tabeli I-1.

Tabela I-1.Tabelarni prikaz matrične igre

Alternative igrača *A*	**Alternative igrača *B***					
	b_1	b_2	**...**	b_j	**...**	b_n
a_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
a_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
$\vdots$	...	...	...	...	...	...
a_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
$\vdots$	...	...	...	...	...	...
a_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

ili u vidu matrice plaćanja A, kao što je prikazano formulacijom 2.1.1.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}] \tag{2.1.1}$$

Uslov nulte sume kaže da je:

$$V_A(a_i,b_j) + V_B(a_i,b_j) = 0 \tag{2.1.2}$$

tj., sledi da je:

$$V_A(a_i,b_j) = -V_B(a_i,b_j) \tag{2.1.3}$$

Jasno je da je, cilj Prvog igrača maksimizacija funkcije $V(a_i,b_j)$, a Drugog igrača minimizacija te iste funkcije.

Treba uočiti, da svaki od igrača bira po jednu od promenljivih koje određuju vrednost funkcije $V(a_i,b_j)$; Prvi igrač strategiju a_i a Drugi igrač strategiju b_j. Drugim rečima, rezultat igre je neizvestan ukoliko se poznaje samo jedna od strategija. Rezultat igre je definisan tek kada su poznate strategije oba igrača.

Igre nulte sume su specijalni slučaj *igara konstantne sume* gde je zbir rezultata oba igrača konstantan.

$$V_A(a_i,b_j) + V_B(a_i,b_j) = const \tag{2.1.4}$$

Kod igara sa rezultatom nula matrica plaćanja potpuno određuje igru. Za ovu igru važe i sledeća pravila:

(1) U svakom trenutku igrači se racionalno ponašaju. Pod takvim okolnostima rešenje igre reprezentuje najcelishodnije stavove igrača.

(2) Pri izboru svoje alternative ni jedan igrač nema informaciju o tome koju je alternativu odabrao njegov protivnik.

Primer 2.1.1. U matrici, koja je predstavljena u tabeli I-2., prikazani su dobici tj. gubici dva igrača koji učestvuju u matričnij igri. U pitanju je izbor odluke o strategiji dva protivnika od kojih je jedan "*Alfa*", a drugi "*Beta*". Potrebno je, na konkretnom primeru, objasniti pojam matrične igre sa rezultatom nula.

Tabela I-2. Matrična formulacija dva igrača

Matrična igra		***"Beta"***		
		b_1	b_2	b_3
"Alfa"	a_1	- 1	0	+ 1
	a_2	- 2	- 3	+ 3
	a_3	- 1	+1	- 3

Rešenje. Konkurentske strategije se razlikuju od onih u stihijskim uslovima time što njih svesno projektuje protivnik. U navedenoj matrici se predstavlja da dobici prikazani igraču "*Alfa*", predstavljaju gubitke, odnosno sume koje igrač "*Beta*" treba da plati prvom igraču "*Alfa*", pri svim mogućim kombinacijama strategije jedne i druge strane.

Pozitivne zabeleške odgovaraju dobitku za prvog igrača "*Alfa*" a gubitku za drugog igrača "*Beta*", i obrnuto. Npr., ukoliko "*Alfa*" izabere za sebe strategiju a_2, a "*Beta*" strategiju b_3, onda je vrednost igre $V= +3$, tj. prvi igrač "*Alfa*" će dobiti tri poena, a drugi igrač "*Beta*" izgubiti isti broj poena.

2.2. Kvantifikacija matrične igre

U konkurenciji između dve firme, ukoliko se dobici/gubici mere udelom plasmana robe ili usluga u ukupnom plasmanu na dotičnom tržištu, onda će, svakako, dobitak jedne firme označiti i gubitak za konkurentsku firmu. Ukoliko se dobitak/gubitak meriobimom plasmana onda uslov nulte sume ne važi, izuzev ako se ukupan kapacitet tržišta ne menja u toku dužeg perioda, a takvi slučajevi su retki.

U vezi predhodne tvrdnje valja istaknuti i to da, iako teorija igara predstavlja matematički model, za utvrđivanje optimalne strategije se mogu primenjivati i čisto kvalitativni faktori. Utvrđivanje parametara matrične igre na kvalitativan način je neminovnost, prvenstveno što se radi o sistemima u kojim aktivno učestvuju ljudi. Primena metoda će se objasniti jednim hipotetičkim primerom.

Primer 2.2.1. Dve firme "Alfa" i "Beta" proizvode laserske štampače. Firma "Alfa" je razradila novi tip štampača, gde su primenjeni novi principi sa poboljšanim kvalitetom štampe uz manju potrošnju tonera. Za taj novi princip proizvodnje firma "Alfa" je dobila patent. Rukovodstvo firme proučava pitanje kako treba postupiti sa novim modelom i razmatraju sledeće tri strategije:

a_1 – planirati proizvodnju većeg broja novih proizvoda a obustaviti proizvodnju starog modela, kako bi se oslobodili proizvodni kapaciteti;

a_2 – pustiti u proizvodnju najveću partiju novog modela a istovremeno održavati rad postojećih linija štampača na predhodnom nivou;

a_3 – ne pustati u proizvodnju novi model do uvođenja dopunskih proizvodnih kapaciteta.

Rukovodstvo kompanije "*Alfa*" smatra da kompanija "*Beta*", u slučaju njene dobre informisanosti o novom patentu, može izabrati samo jednu od tri razumne strategije:

b_1 – modernizovati štampače koje trenutno proizvodi;

b_2 – zadržati proizvodnju štampača koji proizvodi, bez izmene;

b_3 – Pokušati da na brzinu stvori svoj radikalno novi model štampača.

Potrebno je na ovom primeru pojasniti postupak kvantifikacije matrične igre.

Rešenje. Rukovodstvo firme "*Alfa*" sastavlja svoju matricu plaćanja. Oni utvrđuju veličine za svako ukrštanje redova i kolona matrice. Ova intuitivna rasuđivanja su odgovor na pitanje o tome na koji način uslovi, koji odgovaraju rezličitim ukrštanjima redova i kolona u matrici tj. razlićitim parovima strategija, mogu uticati na udeo firme "*Alfa*" u plasmanu štampača u toku dužeg perioda. Pretpostavimo da je posle diskusije, od strane rukovodstva firme "*Alfa*", postignuta saglasnost i razrađena matrica plaćanja, prikazano u tabeli I-3.

Tabela I-3. Kvalitativna matrica plaćanja

		Firma "*Beta*"		
		b_1	b_2	b_3
Firma "*Alfa*"	a_1	Dobro	Srednje	Dobro
	a_2	Srednje	Odlično	Loše
	a_3	Katastrofalno	Dobro	Srednje

Ocenjivanje koje je prikazano u tabeli I-3. je kvalitativnog karaktera. Da bi se sačinila matrica sa kvantitativnim ocenama potrebno je primeniti skalu za prevođenje kvalitativnih ocena u kvantitativne. U tabeli I-4. data je linearna skala, sa opsegom od 0 do 6, za prevođenje kvalitativnih ocena u kvantitativne.

Tabela I-4. Skala za prevođenje kvalitativnih ocena u kvantitativne

Kvalitativna ocena	**Kvantitativna ocena**
katastrofalno	0
veoma loše	1
loše	2
srednje	3
dobro	4
veoma dobro	5
odlično	6

Nakon kvantifikacije kvalitativno datih rešenje, matrica igre je prikazana u tabeli I-5.

Tabela I-5. Kvantitativna matrica plaćanja

		Firma "*Beta*"		
		b_1	b_2	b_3
Firma "*Alfa*"	a_1	4	3	4
	a_2	3	6	2
	a_3	0	4	3

3. Proste matrične igre

3.1. Donja i gornja cena matrične igre

Osnovno pitanje u zadacima koji se formulišu kao matrične igre je: da li postoje optimalne strategije za svakog igrača, i kako se mogu odrediti. Na primeru antagonističke matrične igre igrača A i B, imajući u vidu značenje koeficijenata a_{ij} iz matrice plaćanja (2.1.1), objasnićemo postupak određivanja optimalnih strategija za oba igrača i, na osnovu toga, određivanje vrednosti (cene) matrične igre.

Svaki igrač bira svoju strategiju tako da ishod igre bude što povoljniji za njega. Igrač A nastoji da što više dobije, a igrač B da što manje izgubi u igri. To znači da će oni pokušati da odaberu optimalne strategije iz skupa strategija koje im stoje na raspolaganju.

Posmatra se najpre igrač A i njegovo rezonovanje o mogućnosti povećanja dobitka. Prema matrici plaćanja (2.1.1) njemu stoje na raspolaganju m alternativa. Ako odabere strategiju a_i, onda on dobija jedan od sledećih iznosa:

$$a_{i1},\ a_{i2},\ ...,\ a_{in}$$

u zavisnosti od toga koju alternativu odabere igrač B. U najnepovoljnijem slučaju on će dobiti najmanji od tih iznosa, tj.

$$\min_j\ a_{ij} = a_i \qquad (3.1.1)$$

Međutim, birajući strategiju a_i, igrač A mora da računa na to da će u tom slučaju igrač B izabrati optimalnu strategiju b_j tako da igrač A i dobije iznos $a_{ij} = a_i$. To znači da je za igrača A je najpovoljnija ona strategija - alternativa kojoj odgovara najveći dobitak iz relacije (3.1.1), a on iznosi

$$\max_i a_i = \max_i\ \min_j a_{ij} = a_i^* \qquad (3.1.2)$$

Ako igrač A svoju strategiju odredi na ovaj način, onda a_i^* predstavlja njegov najmanji zagarantovani dobitak u slučaju racionalnog ponašanja igrača B. To znači da njegov dobitak ne može biti manji od ovog iznosa, ali može biti veći ukoliko igrač B ne odabere svoju optimalnu strategiju. Zato se iznos a_i^* često naziva ***donja vrednost matrične igre***. Strategija koja igraču A obezbeđuje dobitak a_i^* naziva se *maksiminimalna strategija*, i ona je optimalna za igrača A.

Na sličan način se analizira nastojanje igrača B da što više smanji svoj gubitak. Ukoliko igrač B odabere strategiju b_j, on plaća igraču A jedan od sledećih iznosa:

$$a_{1j},\ a_{2j},\ ...,\ a_{mj}$$

u zavisnosti od toga koju je alternativu odabrao igrač A. U najnepovoljnijem slučaju on plaća igraču A najveći od tih iznosa, tj.

$$\max_i a_{ij} = b_j \qquad (3.1.3)$$

U slučaju racionalnog ponašanja igrača A, igrač B će morati da plati taj iznos. Za igrača B najbolja je ona strategija prema kojoj će imati najmanji iznos plaćanja iz relacije (3.1.3), a ona se određuje iz relacije

$$\min_j b_j = \min_j \max_i a_{ij} = b_j^* \qquad (3.1.4)$$

Ako igrač B svoju strategiju odredi na ovaj način, on se osigurava da neće platiti više od b_j^*, nezavisno kako igrač A bira svoju strategiju. Međutim, njegov gubitak može biti i manji ukoliko igrač A ne bira optimalnu strategiju. Zbog toga iznos b_j^* predstavlja ***gornju vrednost matrične igre***.

Tako je igrač A uveren da je obezbedio najmanji dobitak od $a_i^* = \max_i \min_j a_{ij}$, a igrač B je siguran da neće platiti više od $b_j^* = \min_j \max_i a_{ij}$.

Može se pokazati da za ove veličine uvek važi nejednačina:

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij} \qquad (3.1.5)$$

Ukoliko se obeleži vrednost matrične igre sa v, zapaža se da se, ukoliko oba igrača igraju svoje optimalne strategije, vrednost matrične igre v nalazi između donje i gornje vrednosti matrične igre, tj.

$$a_i^* \leq v \leq b_j^* \qquad (3.1.6)$$

Za neke matrične igre nejednačina iz relacije (3.1.5) postaju jednačine, tj. važi da je

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*j^*} = v \qquad (3.1.7)$$

U ovakvim igrama veoma se lako određuje optimalna strategija igrača i vrednost matrične igre. Zapravo, element matrice plaćanja $a_{i^*j^*}$, koji zadovoljava jednakost iz relacije (3.1.7), naziva se ***sedlastom tačkom matrice***.

Element a_{ij} predstavljati sedlastu tačku ukoliko ispunjava uslov da je najmanji element svoga reda a u isto vreme i najveći element svoje kolone. Značaj sedlaste tačke matrice plaćanja je u sledećem:

(1) Ona određuje optimalne strategije za oba igrača. Red matrice sa indeksom i^* predstavlja optimalnu strategiju za igrača A. Kolona matrice sa indeksom j^* određuje optimalnu strategiju igrača B. Za matrične igre, u kojima oba igrača igraju uvek istu strategiju, kažemo da su *igre sa **čistom strategijom***, ili da su to ***proste matrične igre***.

(2) Vrednost elementa koji predstavlja sedlastu tačku predstavlja istovremeno i vrednost matrične igre što se vidi iz relacije (3.1.7).

Primer 3.1.1. U igri učestvuju dva igrača A i B. I jedan i drugi igrač imaju na raspolaganju po tri alternative. Alternative igrača A date su po redovima, a igrača B po kolonama. Elementi a_{ij} iz matrice plaćanja označavaju iznose koje igrač B plaća igraču A nakon odigravanja pojedinih alternativa. Neka je igra data sledećom matricom plaćanja:

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 8 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Rešenje. Ako igrač *A* odabere prvu strategiju njegov najmanji mogući dobitak je -4 n.j. (to je njegov gubitak). Ukoliko izabere drugu strategiju najmanje što može dobiti je 2 n.j., a ako odabere treću najmanji mogući dobitak iznosiće -2 (opet je to njegov gubitak). Prema tome on će rezonovati ovako: najbolje je da odaberem drugu strategiju jer ću u svakom slučaju dobiti najmanje 2 n.j., a ukoliko je igrač *B* manje inteligentan (ne odabere za sebe najbolju strategiju) može se desiti da dobijem i 3 n.j.

Igrač *B* rezonuje ovako: aka odaberem prvu strategiju najviše što mogu da izgubim je 8 n.j., ukoliko odaberem drugu 4 n.j., a treću 2 n.j. Zbog toga za igrača *B* je najbalje da odabere treću strategiju jer neće izgubiti više od 2 n.j., bez obzira koju strategiju odabere igrač *A*.

Postupak rešavanja se sastoji u tome sto određujemo najmanje elemente a_{ij} za svaki red, a zatim od svih najmanjih elemenata po redovima biramo najveći. Zato, u koloni pored matrice plaćanja, određujemo najmanje elemente a_{ij} za svaki red. To su: -4 za prvi red, 2 za drugi i -2 za treći red. Najveći od ovih elemenata je 2, tj. važi da je:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max_i (-4, 2, -2) = \max_i (a_{11}, a_{23}, a_{32}) = a_{23} = a_2^* = 2.$$

Zatim, biramo najveće elemente u svakoj koloni i od svih tih najvećih elemenata odabiramo najmanji. U redu ispod matrice plaćanja, određujemo najveće elemente a_{ij} za svaku kolonu: 8 za prvu, 4 za drugu i 2 za treću kolonu. Najmanji od svih ovih elemenata je 2, tj. važi:

$$\min_j \max_i a_{ij} = \min_j (8, 4, 2) = \min_j (a_{31}, a_{21}, a_{23}) = a_{23} = b_3^* = 2.$$

Opisani postupak može se prikazati i na sledeći način:

$$\begin{array}{cc} & \min_j a_{ij} \\ \begin{bmatrix} -4 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 8 & -2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} -4 \\ 2 \\ -2 \end{array} \\ \max_i a_{ij} \quad 8 \quad 4 \quad 2 & \end{array}$$

Kako je: $$\max_i \min_j a_{ij} = a_{23} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{23} = 2,$$

to znači da matrica plaćanja ima sedlastu tačku, koja se nalazi u preseku druge alternative za igraca *A* i treće alternative za igraca *B*. Sedlasta tačka predstavlja vrednost igre, u našem primeru je a_{23} = 2. Vrednost igre predstavlja najmanji mogući dobitak za igrača *A*, ako odabere optimalnu strategiju, odnosno najveći mogući gubitak za igrača *B*, ako on odabere optimalnu strategiju. To dalje znači da igra ima čistu strategiju: za igrača *A* najbolje je da uvek bira drugu strategiju jer njome osigurava dobitak od najmanje 2 novčane jedinice; za igrača *B* najpovoljnija je treća strategija jer se time osigurava da neće ni u kom slučaju plaćati više od 2 novčane jedinice. Vrednost igre jednaka je vrednosti elementa koji predstavlja sedlastu tačku, tj. $v = a_{23} = 2$.

Primer 3.1.2. Konfliktna situacija predstavlja odnos kupca i prodavca robe. Kupac raspolaže sa alternativama K_l, K_2, K_3 i K_4, (npr. alternative mogu biti načini plaćanja kupca:

u gotovom, platnom karticom, čekom, na kredit i slično), a prodavac sa alternativama P_1, P_2, P_3 i P_4 (na primer rokovi plaćanja: 10, 15, 20, 30 dana).U zavisnosti od načina plaćanja kupca i roka plaćanja, prodavac odobrava određenu bonifikaciju u % kao što je prikazano u tabeli I-6. Potrebno je pronaći optimalne strategije za kupca i prodavca, i odrediti kolika će bonifikacija biti za kupca ukoliko i kupac i prodavac odaberu optimalne strategije.

Tabela I-6. Odobreni bonitet u %

	Prodavac			
Kupac	P_1	P_2	P_3	P_4
K_1	6	6	5	7
K_2	9	5	4	8
K_3	8	7	6	9
K_4	7	3	5	7

Rešenje. Najpre treba proveriti da li postoji sedlasta tačka u matrici plaćanja. To je urađeno korišćenjem Wald-ovog pesimističkog kriterijuma i prikazano u matričnoj formi.

$$\begin{array}{c c}
\begin{bmatrix} 6 & 6 & 5 & 5 \\ 9 & 5 & 4 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 9 \\ 7 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} & \left.\begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \end{matrix}\right\} 6 \\
\underbrace{\begin{matrix} 9 & 7 & 6 & 8 \end{matrix}}_{6} &
\end{array}$$

Kako je: $\max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij} = a_{33} = \min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij} = a_{33} = 6,$

znači da postoji sedlasta tačka, pa se radi o matričnim igrama sa čistom strategijom. Optimalna strategija za kupca je K_3 i za prodavca je P_3. Ako kupac i prodavac biraju svoje optimalne strategije, tada će najmanja moguća bonifikacija za kupca iznositi 6%, a za prodavca, ako i on bira svoju optimalnu strategiju, najveća moguća bonifikacija takođe 6%.

Primer 3.1.3. Dva igraca *A* i *B* igraju šah. U trenutku prekida igrač *A* nalazi se u šahu. On ima na raspolaganje tri moguća poteza kraljem i treba da kovertira potez. Igrac *B* je u prekidu analizirao poziciju, zajedno sa svojim sekundantom, i pronašli su da on ima na raspolaganju četiri moguća poteza. Sekundant je, pri proceni pozicije, sačinio matricu placanja, u zavisnosti od poteza koji je kovertirao igrac *A* i poteza koji bi trebao da odigra igrac *B*, koja je prikazana u tabeli I-7. Elementi matrice plaćanja predstavlju verovatnoće dobijanja partije i za jednog i za drugog igrača (verovatnoće koje su sa pozitivnim predznakom znače da igrac *A* stiče bolju poziciju, a verovatnoće sa predznakom minus, znaci da igrač *B* ima bolju poziciju, nula znači da je pozicija remi). Koji je potez najsigumiji, pri kovertiranju, za igrača *A*, a koji je najbolji potez, kao odgovor, za igrača B? Kako izgleda pozicija posle odigrana ta dva poteza?

Tabela I-7. Verovatnoće dobijanja partije

	Igrač *B*			
Igrač *A*	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0,0	0,2	0	0,4
a_2	0,3	-0,2	-0,3	0,1
a_3	-0,4	0,2	-0,1	0

Rešenje. Proveravarno da li postoji sedlasta tačka matrične igre. To je urađeno i prikazano u matričnoj formi.

$$\underbrace{\begin{array}{cccc} \left[\begin{array}{cccc} 0{,}0 & 0{,}2 & 0{,}0 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}2 & -0{,}1 & 0{,}0 \end{array}\right] \\ \hline 0{,}3 \quad 0{,}2 \quad 0{,}0 \quad 0{,}4 \end{array}}_{0{,}0} \left.\begin{array}{c} 0{,}0 \\ -0{,}3 \\ -0{,}4 \end{array}\right\} 0{,}0$$

Kako je: $\max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij} = a_{13} = \min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij} = a_{13} = 0{,}0$

znači da postoji sedlasta tačka, pa se radi o matričnim igrama sa čistom strategijom. Za igraca A najboje je da kovertira potez kraljem prema prvoj mogućnosti, jer će tada najmanje obezbediti remi poziciju. Igracu B, pošto vidi kovertirani potez, ne preostaje nista drugo nego da se odluči za treću moguenost, jer će samo tada obezbediti najmanje remi poziciju. Vrednost matrične igre iznosi 0,0, a to znači da je, prema postavci zadatka, remi pozicija.

Primer 3.1.4. Za matricu plaćanja A odrediti optimalne strategije za oba učesnika u matričnoj igri, sedlastu tačku i vrednost igre.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Rešenje. Rešavanje primera je prikazano u matričnoj formi, prikazano tabelom I-8.

Tabela I-8. Rešavanje primera 3.1.4.

Matrica plaćanja		β				**Minimalni prosečni dobici (*max min*)**
		b_1	b_2	b_3	b_4	
α	a_1	2	5	3	4	2
	a_2	7	8	**6**	9	6
	a_3	3	1	2	5	1
Maksimalni prosečni gubici (*min max*)		7	8	6	9	/

Birajući strategiju a_2, igrač "*Alfa*" će ostvariti garantovani prosečni dobitak od 6 n.j., bez obzira na strategiju igrača "*Beta*". Takođe, birajući strategiju b_3, igrac "*Beta*" će ostvariti minimalni prosečni gubitak od 6 n.j., bez obzira na strategiju igrača "*Alfa*". S obzirom da su *max min* i *min max* vrednosti iste, strategije su optimalne.

Igra ima sedlastu tačku: to je polje a_{23}

Vrednost igre je: $\max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij} = \min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij} = a_{i^*j^*} = a_{23} = v = 6$

Primer 3.1.5. U jednoj epidemiji je otkriveno prisustvo tri vrste mikroba (M_1, M_2 i M_3). Na raspolaganju su nam dve vrste antibiotika (A_1 i A_2). Antibiotik A_1 ima verovatnoću uništavanja mikroba: 0,3; 0,4; 0,5 respektivno. Sa druge strane, antibiotik A_2 uništava mikrobe sa verovatnoćom 0,2; 0,3; 0,6 respektivno. Rešiti matrićnu igru.

Rešenje. Rešavanje primera je prikazano u matričnoj formi, prikazano tabelom I-9.

Tabela I-9. Rešavanje primera 3.1.5.

Matrica plaćanja		Mikrobi			Minimalni prosečni dobici (*max min*)
		M_1	M_2	M_3	
Antibiotici	A_1	**0.3**	0.4	0.5	0,3
	A_2	0.2	0.3	0.6	0,2
Maksimalni prosečni gubici (*min max*)		0.3	0.4	0.6	/

Igra ima sedlastu tačku: to je polje a_{11}.

Vrednost igre je: $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = a_{i^*j^*} = a_{11} = v = 0.3.$

Primer 3.1.6. Dva proizvođača bezalkoholnih pića "*LAV*" i "*TIGAR*" su direktni konkurenti u svojoj klasi pića na lokalnom tržištu i svoje reklamne kampanje provode putem lokalne TV-e ili lokalnih novina, pri čemu svakog meseca preduzeća donose odluku o načinu reklamiranja. Menadžment preduzeća "*LAV*" je sačino sledeće predviđanje:
Ukoliko reklamira svoje sokove preko TV-a imaće:

- dobit od 150.000 dinara ukoliko se preduzeće "*TIGAR*" reklamlra preko novina, i
- dobit od 100.000 dinara ukoliko se preduzeće "*TIGAR*" reklamira preko TV-a.

Ukoliko reklamira svoje sokove preko novina imaće:

- dobit od 50.000 dinara ukoliko se preduzeće "*TIGAR*" reklamira preko TV-a, i
- dobit od 200.000 dinara ako se preduzeće "*TIGAR*" reklamira preko novina.

Formirati matricu igre i odrediti njenu vrednost?

Rešenje. Rešavanje je prikazano u matričnoj formi, koje je prikazano u tabeli I-10.

Tabela I-10. Rešavanje primera

Matrica plaćanja		"*TIGAR*"		Minimalni prosečni dobici (*max min*)
		TV	Novine	
"*LAV*"	TV	100.000	150.000	100.000
	Novine	50.000	200.000	50.000
Maksimalni prosečni gubici (*min max*)		100.000	200.000	/

Igra ima sedlastu tačku: to je polje a_{11}.

Vrednost igre je: $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = a_{i^*j^*} = a_{11} = v = 100.000\ din$

Primer 3.1.7. Dva proizvođača dečje obuće "*TRI PRASETA*" i "*STRAŠNI VUK*" su direktni konkurenti na lokalnom tržištu. Preduzeće "*TRI PRASETA*" je za sezonu jesen-zima 2007. pripremilo potpuno nov model dečje obuće, poboljšan prošlogodišnji model, uz naravno postojeći prošlogodišnji model. Zbog ograničenih proizvodnih kapaciteta i potrebe da lansira zadovoljavajuću veličinu serije, preduzeće treba da se opredeli za jedan model. Rukovodstvo preduzeća "*TRI PRASETA*" zna da direktni konkurent nije razvio novi model obuće, već da je samo poboljšao prošlogodišnji, pa je na osnovu ovoga sačinilo pretpostavke o obimu prodaje, kao merilu uspešnosti izabrane strategije:

Ukoliko "*STRAŠNI VUK*" plasira na tržište poboljšani model, procenjeni obim prodaje je:

- oko 100 pari, ako se plasira nov model,
- oko 80 pari ako se plasira stari poboljšani model, i
- oko 50 pari ako se plasira stari model bez poboljšanja.

Ukoliko "STRAŠNI VUK" plasira na tržište stari model, procenjeni obim prodaje biće:
- oko 150 pari, ako se plasira nov model,
- oko 100 pari ako se plasira stari poboljšani model, i
- oko 75 pari ako se plasira stari model bez poboljšanja.

Formulisati matricu igre, odrediti sedlastu tašku i optimalnu strategiju preduzeća "TRI PRASETA", obzirom na ostvarenje planiranog obima prodaje.

Rešenje. Rešavanje problema je prikazano u matričnoj formi, kao u tabeli I-11.

Tabela I-11. Rešavanje primera 3.1.7.

Matrica plaćanja		***"STRAŠNI VUK"***		**Minimalni prosečni dobici (*max min*)**
		Pob. model	**Stari model**	
"TRI PRASETA"	**Novi model**	**100**	150	100
	Pob. model	80	100	80
	Stari model	50	75	50
Maksimalni prosečni gubici (*min max*)		100	150	/

Igra ima sedlastu tačku: to je polje a_{11}.

Vrednost igre je: $\max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij} = \min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij} = a_{i^*j^*} = a_{11} = v = 100$ pari.

Optimalna strategija preduzeća " TRI PRASETA" je prva strategija, odnosno da na tržište izbaci novi model dečje obuće.

Primer 3.1.8. Dva konkurentska preduzeća (*A* i *B*) mogu da reklamiraju svoje proizvode preko TV i/ili u novinama. Svakog meseca preduzeća donose odluku o broju emitovanih reklama i načinu njihovog emitovanja. Marketing služba preduzeća *A* je uspela da odredi:

- Ukoliko reklamiraju svoje proizvode preko TV imaće:
  - dobit od 100 n.j. ako se preduzeće *B* reklamira preko TV, i
  - dobit od 150 n.j. ako se preduzeće *B* reklamira preko novina.
- Ukoliko reklamiraju svoje proizvode preko novina imaće:
  - gubitak od 100 n.j. ako se preduzeće *B* reklamira preko TV, i
  - dobit od 200 n.j. ako se prsduzeće *B* reklamira preko novina.

Potrebno je formirati matricu plaćanja sa stanovišta preduzeća *A* i naći rešenje igre?

Rešenje. Matrica plaćanja sa stanovišta preduzeća *A* koje teži da reklamiranjem svojih proizvoda ostvari maksimalnu dobit je predstavljena u tabeli I-12.

Tabela I-12. Rešavanje primera 3.1.8.

Matrica plaćanja		***"B"***		**Minimalni prosečni dobici (*max min*)**
		TV (b_1)	**Novine (b_2)**	
"A"	**TV (a_1)**	100	150	100
	Novine (a_2)	-100	200	-100
Maksimalni prosečni gubici (*min max*)		100	200	/

Analizom matrice plaćanja može se doći do sledećih zaključaka:
- Ako preduzeće *A* odluči da se reklamira preko TV (a_1), preduzeće *B* će se reklamirati takođe preko TV (b_1) pošto je gubitak od 100 n.j. manji od 150 n.j.

- Ako preduzeće *A* odluči da se reklamira preko novina (a_2), preduzeće *B* će se reklamirati preko TV (b_1) pošto dobija 100 n.j.
- Ako preduzeće *B* odluči da se reklamira preko TV (b_1), preduzeće *A* će se reklamirati takođe preko TV (a_1) pošto je dobitak od 100 n.j. veći od gubitka od 100 n.j.
- Ako preduzeće *B* odluči da se reklamira preko novina (b_2), prsduzeće *A* će se reklamirati preko novina zato što je dobitak od 200 n.j. veći od 150 n.j.

Iz prethodne analize se može zaključiti:

- Preduzeće *A* će izabrati strategiju a_1 pošto u tom slučaju može da dobije najmanje 100 n.j.
- Preduzeće *B* će izabrati strategiju b_1, pošto u tom slučaju može da izgubi najviše 100 n.j.

Zaključak. Pošto su donja i gornja granica vrednosti igre jednake, ova matrična igra je prosta, a sedlasta tačka se nalazi u polju a_{11} = 100 n.j., što ujedno predstavlja i njenu vrednost. Zato su strategije za preduzeća *A* i *B*, čiste strategije a_1 i b_1 što znači:

- Preduzeće *A* treba uvek da se reklamira preko TV,
- Preduzeće *B* treba uvek da se reklamira preko TV,
- Dobitak preduzeća *A*, tj. gubitak preduzsća *B* će u tom slučaju biti jednak optimalnoj vrednosti matrične igre i iznosiće 100 n.j.

Primer 3.1.9. Raizmatra se mogućnost primene teorije igara u izboru reona razmeštaja stanice tehničkog snabdevanja (*STS*) i stanice tehničkog održavanja (*STO*). Pretpostavlja se da postoje lokacije L_1, L_2, L_3 i L_4 koje su pogodne za razvoj *STS* i *STO*. Procenom situacije utvrđeno je da date lokacije mogu biti ugrožene na sledeći način (varijante protivnika):

P_1 - dejstvo lake pešadije po reonu razmestaja *STS* ili *STO*;
P_2 - dejstvo ubačenih diverzantskih grupa;
P_3 - manji helikopterski desant;
P_4 - udar nukleamim sredstvima.

Analizom načina upotrebe strategija protivnika i načina zaštite pojedinih lokacija, dolazi se do matrice plaćanja koja daje broj uništenih vozila, kao što je prikazano u tabeli I-13. Odluku o reonu razmeštaja *STS* i *STO* doneti nakon rešenja definisane matrične igre.

Tabela I-13. Matrica plaćanja (broj uništenih vozila)

Matrica plaćanja		Lokacije				Minimalan prosečni broj uništenih vozila (*max min*)
		L_1	L_2	L_3	L_4	
Protivnik	P_1	34	35	27	34	27
	P_2	41	34	**32**	36	32
	P_3	27	22	18	18	18
	P_4	55	55	32	29	29
Maksimalni prosečni broj uništenih vozila (*min max*)		55	55	32	36	

Rešenje. Prvi igrač (protivnik) određuje minimalni broj uništenih vozila za svaku svoju strategiju. Za strategiju P_1 to je 27, za P_2 32, za P_3 18 i za P_4 29 vozila. Određivanjem maksimalne između odredenih minimalnih vrednosti, on određuje donju vrednost igre, odnosno određuje svoju sigurnu dobit koja iznosi 32 uništena vozila.

Drugi igrač (jedinica koja bira reone za *STS* i *STO*) u okviru svojih strategija pronalazi maksimalni broj unistenih vozila. Za strategiju L_1 to je 55, za L_2 55, za L_3 32 i za L_4 36 uništena vozila. Između tih maksimalnih, on bira minimalnu vrednost, čime je odredio gornju vrednost igre, koja iznosi 32 uništena vozila.

Igra ima sedlo i rešenje se nalazi u domenu čistih strategija. Vrednost igre je v=32. To znači da je za prvog igrača (potencijalnog protivnika) optimalna strategija P_2, tj. da će on upotrebiti za napad diverzantske jedinice, bez obzira na strategiju drugog igrača jer će u najgorem slučaju uništiti 32 vozila. Drugi igrač za svoju optimalnu strategiju bira strategiju L_3, tj. odabira lokaciju L_3 i na taj način je siguran da neće izgubiti više od 32 vozila, bez obzira na izbor prvog igrača.

Primer 3.1.10. Brigada radnika koja radi na elektrocentrali, čija će smena biti završena sledećeg proleća, stanuje u radničkom naselju nedaleko od gradilišta. Sredinom jeseni razmatra se problem nabavke uglja za zagrevanje naselja. Zavisno od toga kakva će biti nastupajuća zima, potrebe za ugljem biće različite. Ukoliko zima bude normalna potrebno je 150 *T*, za blagu zimu 120 *T*, a za oštru zimu 180 *T* uglja. Kako se radnici sledećeg proleća sele na novo gradilište, višak uglja, koji ostave posle zime neće biti iskorišćen. Ako se ugalj nabavlja sredinom jeseni njegova cena je 100 *din*/*T*. Zavisno od toga da li će zima biti blaga, normalna ili oštra, tona uglja koja se bude nabavljala zimi koštaće 100, 120 i 140 *din*/*T*, respektivno.

Sredinom jeseni u vezi nabavke uglja za predstojeću zimu pred upravom stoje tri moguće strategije, tj. mogu nabaviti 120, 150 ili 180 *T* uglja, a eventualno nedostajuću količinu nabaviće u toku zime ukoliko bude potrebno.

Problem izbora optimalne strategije formulisati kao matričnu igru i formirati matricu cene igre. Naći rešenje matrične igre, tj. odrediti optimalnu strategiju i vrednost matrične igre.

Rešenje. Ovo je problem konflikta. Sa jedne strane Uprava preduzeće, a sa druge priroda, pa se zbog toga ovakve matrične igre nazivaju igre protiv prirode. Rešavanje problema je prikazano u matričnoj formi, kao što je prikazano u tabeli I-14.

Tabela I-14. Rešavanje primera 3.1.10.

Matrična igra		***PRIRODA***			**Minimalni prosečni dobici (*max min*)**
		Blaga zima 120 *T* (100 *din*/*T*)	**Normalna zima 150 *T* (120 *din*/*T*)**	**Oštra zima 180 *T* (140 *din*/*T*)**	
UPRAVA PREDUZEĆA	**120 *T***	-12.000	-15.600	-20.400	-20.400
	150 *T*	-15.000	-15.000	-19.200	-19.200
	180 *T*	-18.000	-18.000	-18.000	-18.000
Maksimalni prosečni gubici (*min max*)		-12.000	-15.000	-18.000	/

Najpre je potrebno izračunati vrednosti za svako polje u matrici plaćanja, tj. vrednosti plaćanja za sva ukrštenja po redovima i kolonama. To se čini na sledeći način:

a_{11} = 120 T * (–100 din/T) = – 12.000 din
a_{12} = 120 T * (–100 din/T) + 30 T * (–120 din/T) = –12.000 – 3.600 = – 15.600 din
a_{13} = 120 T * (–100 din/T) + 60 T * (–140 din/T) = –12.000 – 8.400 = – 20.400 din

a_{21} = 150 T $*$ (–100 din /T) = – 15.000 din
a_{22} = 150 T $*$ (–100 din /T) = – 15.000 din
a_{23} = 150 T $*$ (–100 din /T) + 30 T $*$ (–140 din /T) = –15.000 – 4.200 = – 19.200 din

$a_{31} = a_{32} = a_{33}$ =180 T $*$ (–100 din /T) = – 18.000 *din*

UPRAVA PEDUZEĆA = max (-20.400, -19.200, -18.000) = – 18.000 *din*
PRIRODA = min (-12.000, -15.000, -18.000) = – 18.000 *din*

Igra ima sedlastu tačku: to je polje a_{33}.
Rešenje se nalazi u domenu čistih strategija.
Vrednost igre je: $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = a_{i^*j^*} = a_{33} = v$ = -18.000 *din*

Prema tome za upravu gradilišta optimalna strategija je da se sredinom jeseni kupi 180 *T* uglja po ceni od 100 *din*/*T*, i za to je potrebno izdvojiti 18.000 dinara.

Napomena. U opštem slučaju matrica plaćanja može da ima i više sedlastih tačaka. Tako, u matrici plaćanja *A*:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

elementi na mestu (1, 1) i (1, 3) su sedlaste tačke. Interesantno je da se sedlaste tačke javljaju kao konjugovani parovi. Naime ako su sedlaste tačke elementi na mestima (i_1,j_1) i (i_2,j_2) tad su sedlaste tačke i na mestima (i_1,j_2) i (i_2,j_1).

4. Mešovite matrične igre

4.1. Uvod

Kada matrica plaćanja nema sedlastu tačku, onda je nešto teže određivanje optimalne strategije igrača i vrednosti matriče igre. Zapravo, sada igrač *A* nema čistu strategiju koja bi mu obezbedila minimalni garantovani dobitak uz racionalno ponašanje drugog igrača. Analogno, igrač *B* nema strategiju kojom osigurava gornju granicu svojih plaćanja. Zbog toga igrači uvode elemente slučajnosti kod izbora pojedinih strategija. Oni više ne biraju po jednu strategiju, već se odlučuju za različite strategije. Svaka strategija se pojavljuje sa određenom verovatnoćom.

Posmatrajmo najpre igrača *A*. On ima na raspolaganju *m* alternativa (strategija) i svaku od njih odabira sa određenom verovatnoćom. Označavamo kao:

$$p_1,\ p_2,\ ...,\ p_m$$

verovatnoće izbora pojedinih alternativa. Ove verovatnoće zadovoljavaju sledeće uslove:

$$p_i \geq 0,\ \ i = 1, 2, ..., m \qquad (4.1.1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \qquad (4.1.2)$$

Vektor $P = (p_1, p_2, ..., p_m)$ nazivamo *mešovitom strategijom igrača A*. Kod čiste strategije jedna verovatnoća jednaka je jedinici (1), a sve ostale su jednake nuli (0). Kod mešovite strategije najmanje dve od verovatnoća moraju biti pozitivne.

Na sličan način posmatramo i igrača B. On ima na raspolaganju n alternativa (strategija) i za svaku se odlučuje sa određenom verovatnoćom. Verovatnoće za izbor njegovih strategija označavamo sa:

$$q_1, q_2, ..., q_n.$$

I ove verovatnoće moraju zadovoljiti uslove tipa (4.1.1) i (4.1.2), kao:

$$q_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., n \tag{4.1.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \tag{4.1.4}$$

Vektor $Q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ izražava *mešovitu strategiju igrača B*.

Postavlja se pitanje kako možemo odrediti vrednost matrične igre. Kada oba igrača upotrebljavaju mešovite strategije P i Q, onda vrednost igre neće odgovarati samo vrednosti jednog elementa matrice plaćanja. Igrač A će dobiti iznos a_{ij} od igrača B samo ako on odabere i-tu alternativu, a igrač B j-tu alternativu. Verovatnoća da igrač A izabere i-tu alternativu jednaka je p_i, a verovatnoća da igrač B izabere j-tu alternativu jednaka je q_j. Prema verovatnoći proizvoda nezavisnih događaja, verovatnoća da igrač A dobije iznos a_{ij} jednaka je $p_i q_j$. Srednji dobitak igrača A kada on koristi strategiju $P = (p_1, ..., p_m)$ a igrač B strategiju $Q = (q_1,... , q_n)$ iznosi

$$\mathrm{E}(P,Q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i\, q_j \tag{4.1.5}$$

Igrač A će nastojati da, izborom svoje strategije, uveća ovu vrednost igre, a igrač B će želeti da je što više smanji. Zbog toga, oni će nastojati da izaberu svoje optimalne strategije. Rešenje igre je par optimalnih strategija, P^* za igrača A i Q^* za igrača B, koje poseduju sledeću osobinu: ako se jedan od igrača pridržava svoje optimalne strategije, tada drugom igraču ne odgovara da odstupa od svoje optimalne strategije. To znači da je ispunjen uslov:

$$\mathrm{E}(P, Q^*) \leq \mathrm{E}(P^*, Q^*) \leq \mathrm{E}(P^*, Q) \tag{4.1.6}$$

za sve moguće vrednosti vektora P i Q. Tada vektori P^* i Q^* predstavljaju rešenje matrične igre i predstavljaju optimalne mešovite strategije. Optimalno rešenje P^* i Q^* naziva se još i ***strateško sedlo*** igre, a odgovarajuća srednja vrednost plaćanja predstavlja vrednost matrične igre v, tj.

$$v = \mathrm{E}(P^*, Q^*) \tag{4.1.7}$$

Relacija (4.1.6), koja čini osnovu definicije optimalnih strategija, može se objasniti na sledeći način: Ako igrač A koristi optimalnu strategiju P^*, on osigurava da njegov srenji dobitak bude najmanje $E(P^*, Q^*)$, pod uslovom da igrač B bira svoju optimalnu strategiju Q^*. I obratno, igrač B izborom optimalne strategije Q^* osigurava da njegov srednji gubitak ne bude veći od $E(P^*, Q^*)$, u slučaju da igrač A bira svoju optimalnu strategiju P^*.

4.2. Rešavanje matričnih igara mešovitom strategijom

Obzirom da je objašnjen pojam optimalnih mešovitih strategija, postavlja se pitanje kako pronaći te strategije. U rešavanju matrične igre zadatak je izračunati njeno rešenje i njenu vrednost. Izračunati rešenje matrične igre znači odrediti optimalne strategije koje obezbeđuju najbolji očekivani ishod igre za oba igrača.

U teoriji strateških igara nalazimo različite metode određivanja optimalnih strategija. Jedan broj metoda određuju optimalne strategije i vrednost igre neposredno iz definicije ovih pojmova i one spadaju u direktne metode rešavanja. Ukoliko je matrica igara većih dimenzija, njihovo rešavanje direktnim metodima može biti prilično mukotrpan posao. Zbog toga se razmatraju samo neki od ovih metoda i to za rešavanje jednostavnijih primera. To su matrične igre dimenzija $m\times2$ i $2\times n$, koje se u konačnom postupku svode na igre 2×2.

Pored direktnih metoda, detaljnije razmatramo i jedan metod za rešavanje zadataka sa mešovitom strategijom većih dimenzija, a koji se bazira na linearnom programiranju. Preciznije, pokazano je kako se rešavanje svake matrične igre može prevesti u rešavanje odgovarajućeg problema linearnog programiranja.

Da bismo zasnovali osnovnu teoremu teorije igara (Teorema 4.2.3), navodimo dve pomoćne teoreme (Teoreme 4.2.1 i 4.2.2).

Teorema 4.2.1. (Kriterijum optimalnosti strategija). Da bi strategije P^* i Q^* bile optimalne za igrača A i B, redom, a v da bude cena igre, potrebno je i dovoljno da važe nejednačine:

$$E(P_i, Q^*) \leq v \leq E(P^*, Q_j) \tag{4.2.1}$$

za sve čiste strategije P_i, $i = 1,\dots, m$ i Q_j, $j = 1,\dots, n$.

Dokaz. Prema definiciji optimalnih strategija P^* i Q^*, nejednačine (4.1.6) važe za proizvoljne dve mešovite strategije P i Q. U specijalnom slučaju, za $p_i = 1$, $p_k = 0$, $k \neq i$ i $q_j = 1$, $q_k = 0$, $k \neq j$ mešovite strategije P i Q svode se na čiste strategije P_i i Q_j. Tada se (4.1.6) svodi na (4.2.1).

S druge strane, neka važi (4.2.1). Proizvoljne mešovite strategije $P = (p_1, \dots, p_m)$ i $Q = (q_1,\dots, q_n)$ mogu se predstaviti kao konveksna kombinacija čistih strategija P_i, $i = 1,\dots, m$ i Q_j, $j = 1,\dots, n$:

$$P = \sum_{i=1}^{m} p_i P_i, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \qquad Q = \sum_{j=1}^{n} q_j Q_j, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Tada iz (4.2.1) dobijamo:

$$E(P,Q^*) = \sum_{i=1}^{m} p_i E(P_i,Q^*) \le \sum_{i=1}^{m} p_i v = v = E(P^*,Q^*),$$
$$E(P^*,Q) = \sum_{j=1}^{n} q_j E(P^*,Q_j) \ge \sum_{j=1}^{n} q_j v = v = E(P^*,Q^*).$$

Pre nego što razmotrimo metode rešavanja, pokazaćemo dva svojstva matrične igre koja mogu olakšati njihovo rešavanje.

Teorema 4.2.2. Ako svakom elementu a_{ij} matrice plaćanja dodamo jednu pozitivnu konstantu d, optimalne strategije igrača ostaju nepromenjene, a vrednost matrične igre postaje $v + d$.

Dokaz. Srednja vrednost dobitka igrača A pri izboru strategija P i Q za matricu plaćanja $[a_{ij}]$, prema izrazu (4.1.5), iznosi $\mathrm{E}(P,Q) = \sum\sum a_{ij} p_i q_j$. Nova matrica plaćanja ima elemente $[a_{ij}+ d]$, a vrednost matrične igre obeležićemo sa $\mathrm{E}'(P,Q)$. Očigledno je

$$E'(P,Q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+d)p_i q_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j + d\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j$$
$$= E(P,Q) + d\sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} q_j$$

Obzirom da je:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1 = \sum_{j=1}^{n} q_j$$

dobija se

$$\mathrm{E}'(P,Q) = \mathrm{E}(P,Q) + d \tag{4.2.2}$$

Ako su P^* i Q^* rešenja igre sa matricom plaćanja $[a_{ij}]$, prema (4.1.6) važi:

$$\mathrm{E}(P,Q^*) + d \le v + d \le \mathrm{E}(P^*,Q) + d \tag{4.2.3}$$

Iz (4.2.2) i (4.2.3) dobija se

$$\mathrm{E}'(P,Q^*) \le v+d \le \mathrm{E}'(P^*,Q)$$

čime je pokazano da je rešenje igre sa matricom plaćanja $[a_{ij} + d]$ dato optimalnim strategijama P^* i Q^* kao i cenom igre $v + d$.

Napomena. Ovo svojstvo omogućava da matricu plaćanja, u kojoj ima i negativnih elemenata a_{ij}, dodavanjem odgovarajuće konstante prevedemo u novu matricu kod koje će svi elementi biti nenegativni. Ovo je posebno važno kod rešavanja zadataka matričnih igara pomoću linearnog programiranja. Na osnovu ovog svojstva, u daljem razmatranju koristićemo primere kod kojih matrice plaćanja imaju sve elemente a_{ij} pozitivne.

Teorema 4.2.3. (Osnovna teorema teorije igara). Svaka matrična igra ima rešenje.

Važno svojstvo na koje se ukazuje odnosi se na dominaciju i redukciju matrica plaćanja po dominaciji. Pojam dominacije objasnićemo na primeru sledeće matrice plaćanja:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oba igrača imaju na raspolaganju po tri alternative. Posmatramo najpre alternative prvog igrača (igrač A) i to drugu i treću. Ako odabere drugu alternativu, on može dobiti 5, 4 ili 2 novčane jedinice u zavisnosti od toga šta odabere igrač B. Međutim, ako odabere treću alternativu, on može dobiti 3, 2 ili 1 novčanu jedinicu. Ako u matrici uporedimo brojeve drugog i trećeg reda, primećujemo da su svi brojevi iz trećeg reda manji od odgovarajućih brojeva iz drugog reda. To znači da je za igrača A treća alternativa nepovoljnija od druge alternative, pa će on u proučavanju svoje strategije zanemariti treći red. U ovom slučaju kažemo da druga strategija igrača A dominira nad trećom, pa će kod određivanja optimalne strategije biti $p_3 = 0$.

Nešto slično možemo primetiti i kod posmatranja alternativa igrača B. Kako su u matrici plaćanja svi brojevi prve kolone veći od odgovarajućih brojeva druge kolone, to je za igrača B druga strategija bolja od prve, tj. druga strategija igrača B dominira nad prvom. Zato će u optimalnoj strategiji igrača B biti $q_1 = 0$. Zanemarujući na ovaj način nepovoljne alternative igrača, mi smo izvršili redukciju matrice na osnovu dominacije. Time smo od matrice 3×3 dobili novu matricu dimenzija 2×2, za koju je lakše naći rešenje.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Definicija 4.2.1. Za strategiju A_k igrača A kažemo da je dominantna u odnosu na strategiju A_r ako je ispunjeno:

$$a_{kj} \geq a_{rj}, \; j = 1, \ldots, n.$$

Dualno, za strategiju B_s igrača B kažemo da je dominantna u odnosu na strategiju B_t ako je ispunjeno:

$$a_{is} \leq a_{it}, \; i = 1, \ldots, m.$$

4.2.1. Algoritmi za rešavanje matričnih igara

Najjednostavniji slučaj matrične igre je igra tipa 2×2. Ako ova igra ima sedlastu tačku, rešenje je par strategija koje se seku u sedlastoj tački. U suprotnom, optimalne strategije su dve mešovite strategije $P^* = (p_1^*, p_2^*)$, $Q^* = (q_1^*, q_2^*)$. Odredimo prvo optimalnu strategiju P^*. Sledeći algoritam je baziran na vrednosti matrične igre. Vrednost igre $v = (P^*, Q^*)$ se može izraziti na dva ekvivalentna načina. Jedna reprezentacija vrednosti ige v data je izrazom:

$$E(P^*, Q^*) = q_1^*(a_{11} p_1^* + a_{21} p_2^*) + q_2^*(a_{12} p_1^* + a_{22} p_2^*)$$

Igrač *A* mora da odabere svoju strategiju tako da njegov srednji dobitak bude najmanje jednak ceni igre (jednaku broju v), bez obzira na strategiju igrača *B*. Odatle se dobija sledeći sistem jednačina:

$$a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v \tag{4.2.4}$$

$$a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v \tag{4.2.5}$$

Koristeći (4.2.4) i (4.2.5), zajedno sa izrazom $p_1^* + p_2^* = 1$, dobijamo

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$

$$p_2^* = 1 - p_1^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$

$$v = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Analogno se dobija optimalna strategija $Q^* = (q_1^*, q_2^*)$ igrača *B*. Sada se vrednost igre $v = E(P^*, Q^*)$ izražava na sledeća dva ekvivalentna načina:

$$E(P^*,Q^*) = p_1^*(a_{11}q_1^* + a_{12}q_2^*) + p_2^*(a_{21}q_1^* + a_{22}q_2^*)$$

odakle se dobija sistem jednačina:

$$a_{11}q_1^* + a_{12}q_2^* = v$$

$$a_{21}q_1^* + a_{22}q_2^* = v$$

Koristeći $q_1^* + q_2^* = 1$, dobijaju se vrednosti za q_1^* i q_2^*:

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$

$$q_2^* = 1 - q_1^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

4.3. Rešavanje matričnih igara dimenzija 2×2

Mešovita matrična igra 2×2 je igra u kojoj svakom igraču na raspolaganju stoje po dve čiste strategije, a igra nema sedlastu tačku. Verovatnoće preduzimanja pojedinih strategija su veće od nule ($p_1,p_2,q_1,q_2>0$). Direktni metodi, koje se najčešće koriste za njihovo rešavanje, ilustrovane su na primerima matrica dimenzija 2×2, to su:

- analitički (prikazana su dva metoda), i
- grafički (geometrijski).

4.3.1. Analitički metod rešavanja

Rešavanje mešovitih matričnih igara, primenom dva analitička metoda, je objašnjeno kroz sledeće primere.

Primer 4.3.1.1. Potrebno je analitičkim postupkom odrediti optimalne strategije igrača i vrednost matrične igre, koja je definisana matricom plaćanja A:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Rešenje. Najpre proverimo da li matrica ima sedlastu tačku.

$$\begin{array}{ccc} & & \min\limits_j a_{ij} \\ & \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \\ \max\limits_i a_{ij} & \begin{array}{cc} 8 & 6 \end{array} & \end{array}$$

Kako je: $\quad a_i^* = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 4 < b_j^* = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 6$,

to znači da matrica nema sedlastu tačku, pa se rešenje igre nalazi u domenu mešovitih strategija, a vrednost igre u granicama: $4 < v < 6$. Prikazana su dva jednostavna analitička postupka za rešavanje ovog zadatka.

Postupak 1. U ovom postupku polazimo od relacije (4.1.5), prema kojoj je

$$v = \mathrm{E}(P,Q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i q_j$$

U ovom primeru ćemo sa p_1 i p_2 obeležiti verovatnoće izbora prve i druge alternative igrača A, a sa q_1 i q_2 verovatnoće izbora prve i druge alternative igrača B. Prema (4.1.2) dobija se $p_1 + p_2 = 1$, a na osnovu (4.1.4) važi $q_1 + q_2 = 1$. Na osnovu ovih relacija određujemo da $p_2 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - q_1$. Uzimajući u obzir i ove relacije, dobija se:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(P,Q) &= 4\, p_1 q_1 + 6\, p_1 q_2 + 8\, p_2 q_1 + 2\, p_2 q_2 = \\ &= 4\, p_1 q_1 + 6\, p_1(1 - q_1) + 8\, q_1 (1 - p_1) + 2\,(1 - p_1)(1 - q_1). \end{aligned}$$

Posle sređivanja dobijamo:

$$\mathrm{E}(P,Q) = -8\, p_1 q_1 + 4\, p_1 + 6\, q_1 + 2.$$

Rešenje matrične igre se dobija rešavanjem sistema koji se dobija posle izjednačavanja parcijalnih izvoda ove funkcije po p_1 i q_1 sa nulom. Obzirom na to da je:

$$\frac{\partial E}{\partial p_1} = -8q_1 + 4 = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial q_1} = -8p_1 + 6 = 0,$$

dobija se:

$$q_1 = \frac{1}{2},\ q_2 = 1 - q_1 = \frac{1}{2},\ \ p_1 = \frac{3}{4},\ p_2 = 1 - p_1 = \frac{1}{4}.$$

Vrednost matrične igre je:

$$v = -8\, p_1 q_1 + 4\, p_1 + 6\, q_1 + 2 = 5.$$

Prema tome, optimalno rešenje matrične igre je:

$$P^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \quad Q^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad E(P^*, Q^*) = 5.$$

Postupak 2. Drugi način rešavanja, takođe, polazi od vrednosti matrične igre. Zapravo, vrednost igre, za primer koji rešavamo, može se izraziti i na sledeći način:

$$v = E(P^*,Q^*) = p_1^*(4q_1^* + 6q_2^*) + p_2^*(8q_1^* + 2q_2^*) ,$$

odnosno:

$$v = E(P^*,Q^*) = q_1^*(4p_1^* + 8p_2^*) + q_2^*(6p_1^* + 2p_2^*) .$$

Kako je rešenje igre u domenu mešovitih strategija, to se na osnovu prethodna dva izraza mogu formirati jednačine na osnovu kojih će se odrediti optimalne strategije.

Tako, na osnovu prvog izraza, igrač B mora svoju strategiju odrediti tako da, nezavisno od igrača A, ne plati više od $E(P^*,Q^*)$, odnosno tako da važe sledeće jednakosti (jer je $E(P,Q^*) \geq E(P^*,Q^*)$):

$$4q_1^* + 6q_2^* = E(P^*, Q^*),$$
$$8q_1^* + 2q_2^* = E(P^*, Q^*),$$

Koristeći dodatni uslov

$$q_1^* + q_2^* = 1,$$

dobija se sistem od tri jednačine sa tri nepoznate, koji se može rešiti veoma jednostavno. Kako su desne strane za prve dve jednačine jednake, jednake su i leve strane, pa je

$$4q_1^* + 6q_2^* = 8q_1^* + 2q_2^* ,$$

odnosno

$$-4q_1^* + 4q_2^* = 0.$$

Sada se ova i treća jednačina rešavaju, tako da se dobija rešenje:

$$q_1^* = \frac{1}{2}, \quad q_2^* = \frac{1}{2}, \quad v = E(P^*, Q^*) = 5.$$

Na sličan način, na osnovu drugog izraza, formiramo sistem jednačina za igrača A:

$$4p_1^* + 8p_2^* = E(P^*, Q^*),$$
$$6p_1^* + 2p_2^* = E(P^*, Q^*),$$
$$p_1^* + p_2^* = 1$$

Rešenje ovog sistema jednačina je:

$$p_1^* = \frac{3}{4}, \; p_2^* = \frac{1}{4}, \; v = 5 .$$

U sledećem primeru je pokazano da se mogu rešavati problemi mešovitih matrišnih igara i većih dimenzija od 2×2 korišćenjem dva ranije opisana analitička postupaka.

Primer 4.3.1.2. Naći rešenje matrične igre koja je zadata matricom plaćanja

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 8 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Postupak 2. koji se koristi za rešavanje mešovite matrične igre dimenzija 3x3.

$$\begin{aligned} E(P,Q) = {} & 2p_1q_1 + 5p_1q_2 + 4p_1q_3 \\ & + 8p_2q_1 + 3p_2q_2 + p_2q_3 \\ & + 4p_3q_1 + 3p_3q_2 + 6p_3q_3 \end{aligned}$$

$$v = E(P^*, Q^*) = p_1^*(2q_1^* + 5q_2^* + 4q_3^*) + p_2^*(8q_1^* + 3q_2^* + q_3^*) + p_3^*(4q_1^* + 3q_2^* + 6q_3^*)$$

Odatle se dobija sistem linearnih jednačina:

$$\begin{aligned} & 2q_1^* + 5q_2^* + 4q_3^* = v \\ & 8q_1^* + 3q_2^* + q_3^* = v \\ & 4q_1^* + 3q_2^* + 6q_3^* = v \\ & q_1^* + q_2^* + q_3^* = 1 \end{aligned}$$

Rešenjem sistema, četiri jednačina sa četiri promenljivih, dobija se:

$$q_1^* = \frac{5}{18}, \quad q_2^* = \frac{9}{18}, \quad q_3^* = \frac{4}{18}, \quad v = \frac{71}{18}.$$

Sa druge strane dobija se:

$$v = E(P^*, Q^*) = q_1^*(2p_1^* + 8p_2^* + 4p_3^*) + q_2^*(5p_1^* + 3p_2^* + 3p_3^*) + q_3^*(4p_1^* + p_2^* + 6p_3^*)$$

odnosno sistem linearnih jednačina:

$$\begin{aligned} & 2p_1^* + 8p_2^* + 4p_3^* = v \\ & 5p_1^* + 3p_2^* + 3p_3^* = v \\ & 4p_1^* + p_2^* + 6p_3^* = v \\ & p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1 \end{aligned}$$

Rešenje ovog sistema je:

$$p_1^* = \frac{17}{36}, \quad p_2^* = \frac{2}{9}, \quad q_3^* = \frac{11}{36}, \quad v = \frac{71}{18}.$$

Postupak 1. Izjednačavanja parcijalnih izvoda funkcije E(P,Q) po p_1, p_2, q_1 i q_2 sa nulom.

$$\begin{aligned} E(P,Q) = {} & 2p_1q_1 + 5p_1q_2 + 4p_1q_3 \\ & + 8p_2q_1 + 3p_2q_2 + p_2q_3 \\ & + 4p_3q_1 + 3p_3q_2 + 6p_3q_3 \\ = {} & 2p_1q_1 + 5p_1q_2 + 4p_1(1 - q_1 - q_2) \\ & + 8p_2q_1 + 3p_2q_2 + p_2(1 - q_1 - q_2) \\ & + 4p_3q_1 + 3p_3q_2 + 6p_3(1 - q_1 - q_2) \\ = {} & 4p_1q_2 - 2p_1 - 5p_2 - 3q_2 - 2q_1 + 9p_2q_1 + 5p_2q_2 \end{aligned}$$

Izjednačavanjem parcijalnih izvoda matematičkog očekivanja sa nulom, dobija se sistem

$$\frac{\partial E}{\partial p_1} = 4q_2 - 2 = 0$$
$$\frac{\partial E}{\partial p_2} = -5 + 9q_1 + 5q_2 = 0$$
$$\frac{\partial E}{\partial q_1} = 2 + 9p_2 = 0$$
$$\frac{\partial E}{\partial q_2} = 4p_1 - 3 + 5p_2 = 0$$

Rešenje ovog sistema daje isti rezultat kao i prethodni metod.

4.3.2. Grafički metod rešavanja

Ovaj metod može se koristiti samo za rešavanje igara čija je matrica plaćanja reda 2×2, 2×*n* ili *m*×2. Na sledećem primeru objašnjen je grafički, odnosno geometrijski metod.

Primer 4.3.2.1. Potrebno je grafičkim (geometrijskim) metodom odrediti optimalne strategije igrača i vrednost matrične igre, koja je definisana matricom plaćanja *A*:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

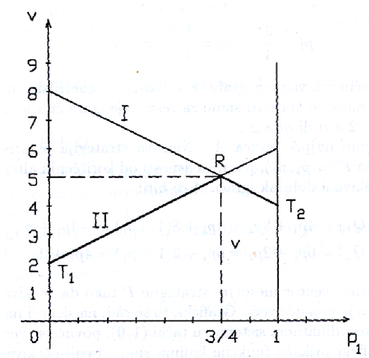
Rešenje. Konstantovali smo da matrica plaćanja nema sedlastu tačku. Posmatramo najpre igrača *A*. Njegova strategija je predstavljena vektorom $P = (p_1, p_2)$, pa, u zavisnosti od korišćenih alternativa igrača *B*, očekivani dobitak igrača *A* će biti:

$$E(P, Q_1) = 4p_1 + 8p_2 = 4p_1 + 8(1 - p_1) = -4p_1 + 8 ,$$

$$E(P, Q_2) = 6p_1 + 2p_2 = 6p_1 + 2(1 - p_1) = 4p_1 + 2 .$$

Napomenimo da su Q_1 i Q_2 sledeće strategije igrača *B*: $Q_1 = \{1,0\}$ $Q_2 = \{0,1\}$.

Igrač *A* biraće vektor mešovite strategije *P* tako da očekivani dobitak bude što je moguće veći. Grafički, to se radi na sledeći način: U pravouglom koordinatnom sistemu, u tački (1,0), povuče se vertikala. Zatim se grafički prikažu funkcije kojima smo izrazili očekivane dobitke. Na primer, funkcija $E(P,Q_1) = -4p_1 + 8$ ima pravac koji prolazi kroz tačke (0,8) i (1,4) (na slici I-3. označen sa I), a funkcija $E(P,Q_2) = 4p_1 + 2$ pravac koji prolazi kroz tačke (0,2) i (1,6) (označen sa II).



Slika I-3. Optimalna strategija za igrača A

Svaka tačka na grafiku funkcije I ima za apscisu verovatnoću p_1 kojom igrač *A* bira svoju prvu strategiju, a za ordinatu vrednost odgovarajućeg očekivanog dobitka kada igrač *B* koristi svoju prvu strategiju. Analogno značenje imaju koordinate tačaka na grafiku funkcije II.

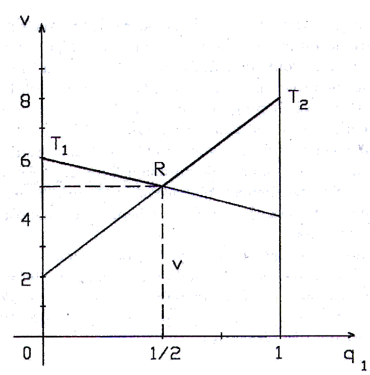
Određivanje optimalne mešovite strategije P^* za igrača *A* sastoji se u određivanju verovatnoće p_1, koja će omogućiti najveći minimalni dobitak. Idući od tačke T_1 (za koju je $p_1 = 0$) preko pojačane izlomljene linije T_1RT_2, on prelazi sve svoje mešovite strategije. Za svaku mešovitu strategiju on utvrđuje minimalni očekivani dobitak na taj način što sa grafika očita ordinatu odgovarajuće tačke na izlomljenoj liniji T_1RT_2. Za $p_1 = 3/4$ igrač *A* postiže najveći od svih minimalnih očekivanih dobitaka. Time je određena njegova optimalna strategija $P^* = (3/4,1/4)$. Vrednost matrične igre očitava se sa grafika kao vrednost ordinate za $p_1 = 3/4$ i iznosi $v = 5$.

Na sličan način posmatramo i igrača *B*. Njegova očekivana plaćanja zavise od korišćenih strategija igrača *A* i iznose

$$E(P_1, Q) = 4q_1 + 6q_2 = 4q_1 + 6(1\text{-}q_1) = -2q_1 + 6 ,$$

$$E(P_2, Q) = 8q_1 + 2q_2 = 8q_1 + 2(1\text{-}q_1) = 6q_1 + 2 .$$

Grafički prikaz ovih funkcija i odgovarajuće rešenje dati su na slici I-4.



Slika I-4. Optimalna strategija za igrača B

Igrač *B* će svoju optimalnu strategiju Q^* odrediti birajući verovatnoću q_1 tako da minimizira svoje maksimalno moguće gubitke. Na Slici 4.3.2.2. pojačana izlomljena linija T_1RT_2

označava njegove maksimalne očekivane gubitke, u zavisnosti od izabrane verovatnoće q_1. On nastoji da minimizira te gubitke i to će ostvariti za $q_1 = 1/2$. Prema tome, njegova optimalna strategija će biti $Q^* = (1/2,\ 1/2)$. Vrednost odgovarajuće ordinate predstavlja i vrednost matrične igre $v = 5$.

4.4. Rešavanje matričnih igara dimenzija m×2

Matrične igre u kojima igraču *A* stoji na raspolaganju *m* čistih strategija, a igracu *B* samo dve, mogu se rešavati grafički svođenjem na matricu dimenzija 2×2.

Primer 4.4.1. Matrica plaćanja za antagonističku igru data je u tabeli I-15. Elementi matrice definišu dobit igrača *A*. Potrebno je odrediti optimalne strategije oba igrača i vrednost matrične igre.

Tabela I-15. Matrica plaćanja

Matrica plaćanja		***B***		**Minimalni prosečni dobici (*max min*)**
		$b_1(q_1)$	$b_2(q_2)$	
A	$a_1(p_1)$	4	3	3
	$a_2(p_2)$	2	4	2
	$a_3(p_3)$	0	5	0
	$a_4(p_4)$	-1	6	-1
Maksimalni prosečni gubici (*min max*)		4	6	

Rešenje. Na poznati način se određuje da su minimalni prosečni dobici za igrača *A*: *max min* $a_{ij} = a_{12} = 3$ n.j., a maksimalni prosečni gubici za igrača *B*: *min max* $a_{ij} = a_{11} = 4$ n.j. Kako je $a_{12} \neq a_{11}$ igra nije potpuno određena i rešenje se nalazi u domenu mešovitih strategija. Vrednost igre je u granicama: $3 \le v \le 4$.

Prvi igrač nastoji da za, bilo koju čistu strategiju protivnika, primenom svoje mešovite strategije ostvari dobitak veći ili jednak vrednosti igre. Drugi igrač nastoji da za, bilo koju čistu strategiju prvog igrača, primenom svoje mešovite strategije izgubi manje ili jednako vrednosti igre. Na osnovu toga, moguće je napisati sistem nejednačina:

$$\begin{aligned}
&4p_1 + 2p_2 - p_4 \ge v \\
&3p_1 + 4p_2 + 5p_3 + 6p_4 \ge v \\
&4q_1 + 3q_2 \le v \\
&2q_1 + 4q_2 \le v \\
&5q_2 \le v \\
&-q_1 + 6q_2 \le v
\end{aligned}$$

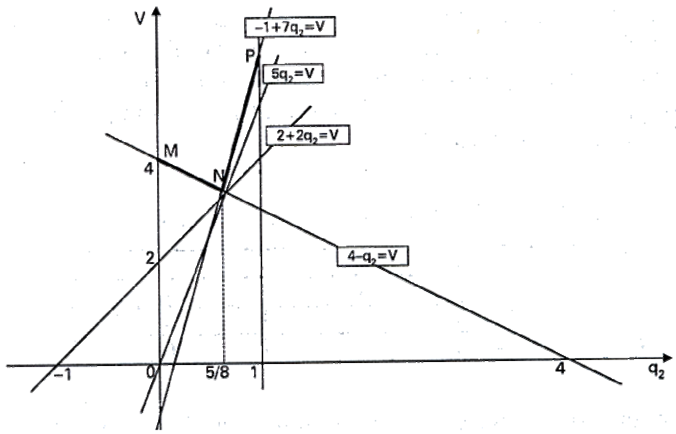
Poznato je i sledeće:

$$\begin{aligned}
&p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \\
&q_1 + q_2 = 1
\end{aligned}$$

Primenom izraza $q_1 = 1 - q_2$ pripremaju se očekivani gubici drugog igrača za grafičko prikazivanje:

$$4 - q_2 \le v$$
$$2 + 2q_2 \le v$$
$$5q_2 \le v$$
$$-1 + 7q_2 \le v$$

Sistem nejednačina svodi se na sistem jednačina i prikazuje grafički, kao na slici I-5.



Slika I-5. Očekivani gubitak drugog igrača

Igrač *B*, budući da teži minimizaciji maksimalnog gubitka, traži minimum funkcije:

$$f(q_2) = \max_{q_2}\{4 - q_2, 2 + 2q_2, 5q_2, -1 + 7q_2\}$$

definisane na intervalu $0 \le q_2 \le 1$. Minimum date funkcije nalazi se u tački *N* koja leži na preseku pravih $4\text{-}q_2$ i $-1+7q_2$. Koordinate tačke *N* su (5/8, 27/8) pa je: $q_2^*=5/8$ i $v=27/8$.

Vektor optimalne mešovite strategije igrača *B* je: $Q^* = (q_1^*, q_2^*) = (3/8, 5/8)$.

Za određivanje optimalne mešovite strategije prvog igrača koristi se sledeća tvrdnja:

- ako je: $p_1a_{1j} + p_2a_{2j} + ... + p_mx_{mj} > v$, tada je $q_j = 0$, i
- ako je: $q_1a_{i1} + q_2a_{i2} + ... + q_nx_{in} < v$, tada je $p_i = 0$

Gubici igrača *B* za pojedine čiste strategije igrača *A* su:

$$p_1 : 4 - \frac{5}{8} = \frac{27}{8} = v$$
$$p_2 : 2 + 2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{26}{8} < v$$
$$p_3 : 5 \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{8} < v$$
$$p_4 : -1 + 7 \cdot \frac{5}{8} = \frac{27}{8} = v$$

Na osnovu navedene tvrdnje sledi da je $p_2 = p_3 = 0$. Sasvim je logično da prvi igrač neće da primeni svoje čiste strategije p_2 i p_3 jer u slučaju njihove primene drugi igrač ostvaruje gubitak manji od vrednosti igre što je za prvog igrača nepovoljno. Početna matrica plaćanja svedena je na formu 2×2 i data je u tabeli I-16.

Tabela I-16. Redukovana matrica plaćanja

Matrica plaćanja		***B***	
		$b_1(q_1)$	$b_2(q_2)$
A	$a_1(p_1)$	4	3
	$a_4(p_4)$	-1	6

Optimalna mešovita strategija igrača *A* dobija se rešenjem sistema nejednačina:

$$4p_1 + 2\cdot 0 - p_4 \geq v \Rightarrow 4p_1 - p_4 \geq \frac{27}{8}$$

$$3p_1 + 4\cdot 0 + 5\cdot 0 + 6p_4 \geq v \Rightarrow 3p_1 + 6p_4 \geq \frac{27}{8}$$

Optimalna mešovita strategija igrača *A* je: $P^* = (p_1^*, p_2^*) = (7/8, 1/8)$.

4.5. Rešavanje matričnih igara dimenzija 2×n

Prvom igraću stoje na raspolaganju dve strategije, a drugi igrač raspolaže sa *n* strategija. Ovakvi zadaci mogu se rešavati grafički, svođenjem na matricu dimenzija 2×2, analognim postupkom koji je prikazan u predhodnom primeru.

Primer 4.5.1. Rešiti matričnu igru, dimenzija 2×4, koja je prikazana u tabeli I-17.

Tabela I-17. Matrica plaćanja

Matrica plaćanja		***B***				**Minimalni prosečni dobici (*max min*)**
		$b_1(q_1)$	$b_2(q_2)$	$b_3(q_3)$	$b_4(q_4)$	
A	$a_1(p_1)$	2	3	1	4	1
	$a_2(p_2)$	4	2	3	1	1
Maksimalni prosečni gubici (*min max*)		4	3	3	4	

Rešenje. Vrednost igre nalazi se u granicama: $1 \leq v \leq 3$.

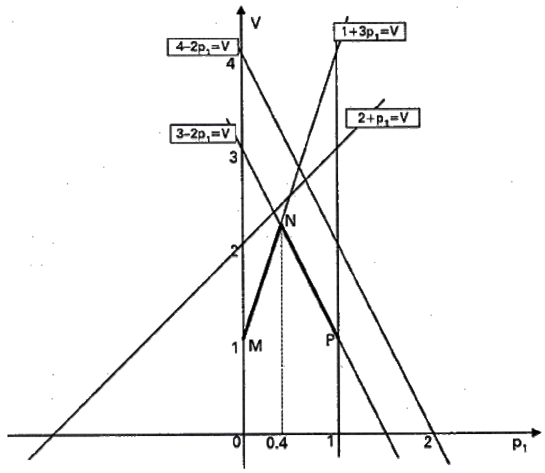
Igra je neodređena i potrebno je odrediti mešovite strategije za oba igrača. Na osnovu poznatih teorijskih osnova mešovitih matričnih igara mogu se napisati sledeće nejednačine:

$$2p_1 + 4p_2 \geq v$$
$$3p_1 + 2p_2 \geq v$$
$$p_1 + 3p_2 \geq v$$
$$4p_1 + p_2 \geq v$$
$$2q_1 + 3q_2 + q_3 + 4q_4 \leq v$$
$$4q_1 + 2q_2 + 3q_3 + q_4 \leq v$$

Primenom poznatog izraza p_2=1-p_1 svode se očekivane vrednosti dobiti prvog igrača, za pojedine čiste strategije drugog igrača, na oblik pogodan za grafičko prikazivanje:

$$4-2p_1 \geq v$$
$$2+p_1 \geq v$$
$$3-2p_1 \geq v$$
$$1+3p_1 \geq v$$

Grafički prikaz očekivanih vrednosti dobiti prvog igrača dat je na slici I-6.



Slika I-6. Očekivana dobit prvog igrača

Igrač *A* nastoji da maksimizira minimalnu dobit pa stoga traži maksimum funkcije:

$$f(p_1) = \min_{p_1}\{4-2p_1, 2+p_1, 3-2p_1, 1+3p_1\}$$

definisane na intervalu [0,1]. Maksimum date funkcije nalazi se u tački *N* koja lezi na preseku pravih 3-2p_1 i 1+3p_1. Apscisa tačke *N* predstavlja vrednost verovatnoće p_1 = 0.4, a ordinata tačke *N* je vrednost igre ν =2,2.

Optimalna mešovita strategija prvog igrača je $P^* = (p_1^*, p_2^*) = (0.4, 0.6)$.

Očekivane vrednosti dobiti igrača *A* za pojedine čiste strategije igrača *B*:

$$4-2\cdot 0{,}4 = 3{,}2 > v$$
$$2+0{,}4 = 2{,}4 > v$$
$$3-2\cdot 0{,}4 = 2{,}2 = v$$
$$1+3\cdot 0{,}4 = 2{,}2 = v$$

Jasno je da igrač *B* neće primenjivati svoje čiste strategije q_1 i q_2 jer bi time omogućio igraču *A* dobit veću od vrednosti igre, što je sa njegove tačke gledišta nepovoljno. Sledi da je q_1=q_2=0. Početna matrica plažanja svodi se na matricu plaćanja formata 2×2, kao što je prikazano u tabeli I-18.

Tabela I-18. Redukovana matrica plaćanja

Matrica plaćanja		***B***	
		$b_3(q_3)$	$b_4(q_4)$
A	$a_1(p_1)$	1	4
	$a_2(p_2)$	3	1

Optimalna mešovita strategija igrača B određuje se rešavanjem sistema nejednačina:

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + q_3 + 4q_4 \le v \Rightarrow q_3 + 4q_4 \le 2{,}2$$
$$4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3q_3 + q_4 \le v \Rightarrow 3q_3 + q_4 \le 2{,}2$$

Optimalna mešovita strategija igrača B je: $Q^* = (q_1^*, q_2^*) = (0; 0; 0{,}6; 0{,}4)$.

4.6. Rešavanje matričnih igara redukcijom matrične cene

Može se pokazati da se u bilo kojoj igri reda $2\times n$ i $m\times 2$ nikad ne može naći više od dve korisne strategije za svakog igrača, dok se preostale strategije ne mogu iskoristiti u optimalnoj mešovitoj strategiji. Zato se početna matrica plaćanja može redukovati na jednostavniju i time uprostiti postupak. To se postiže određivanjem duplih i dominirajućih strategija.

Duple strategije su one kod kojih je $a_{ij} = a_{kj}$, tj. svi elementi matrice plaćanja datih strategija su jednaki. Tada se jedna strategija može zanemariti.

Dominantna strategija je ona koja je po svim elementima veća ili jednaka od neke druge strategije: $a_{ij} \ge a_{kj}$, za j=1, 2, ..., n, a postoji bar jedno j za koje je a_{ij} strogo veće od a_{kj}. Strategija a_{kj} se zanemaruje.

Na sličan način se i za drugog igrača mogu definisati duple i dominantne strategije i time smanjiti dimenzije matrice.

Primer 4.6.1. Igra dva igrača definisana je matricom plaćanja koja je data u tabeli I-19. Potrebno je odrediti optimalne strategije za oba igrača i naći vrednost igre.

Tabela I-19. Matrica plaćanja

Matrica plaćanja		**II igrač**			
		b_1	b_2	b_3	b_4
I igrač	a_1	10	10	2	2
	a_2	2	2	9	9
	a_3	5	10	5	10
	a_4	4	2	4	2

Rešenje. Definisana matrična igra je reda 4x4, pa je nužno izvršiti (ako je to izvodljivo) redukciju matrice plaćanja. Analizom matrice plaćanja utvrđuje se da ne postoje duple strategije ni za jednog igrača. Ako se posmatraju strategije prvog igrača uočava se da je strategija a_4 dominirana od strategije a_3, pa se strategija a_4 kao takva odbacuje, i dobija matrična igra reda 3×4, kao što je prikazano u tabeli I-20.

Tabela I-20. Matrica plaćanja bez dominirane strategije a_4

Matrica plaćanja		**II igrač**			
		b_1	b_2	b_3	b_4
I igrač	a_1	10	10	2	2
	a_2	2	2	9	9
	a_3	5	10	5	10

Posmatrajući strategije drugog igrača uočava se da je strategija b_1 dominantna nad strategijom b_2, a strategija b_3 dominira nad strategiojm b_4. Strategije b_2 i b_4 se odbacuju. Početna matrica plaćanja svedena je na matricu dimenzija 3×2, prikazano u tabeli I-21.

Tabela I-21. Matrica plaćanja bez dominiranih strategija a_4 , b_2 i b_4

Matrica plaćanja		**II igrač**		**Minimalni prosečni dobici (*max min*)**
		$b_1(q_1)$	$b_3(q_3)$	
I igrač	$a_1(p_1)$	10	2	2
	$a_2(p_2)$	2	9	2
	$a_3(p_3)$	5	5	5
Maksimalni prosečni gubici (*min max*)		10	9	

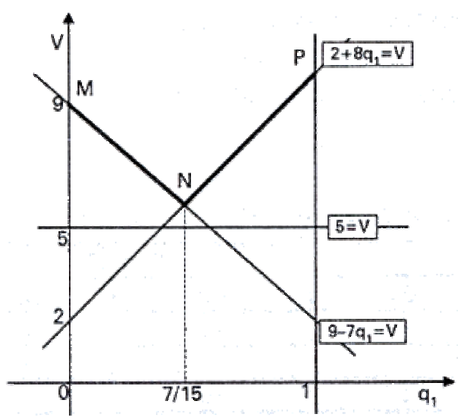
Vrednost igre se nalazi u granicama $5 \leq v \leq 9$. Rešavanje igre započinje definisanjem sistema nejednačina:

$$10p_1 + 2p_2 + 5p_3 \geq v$$
$$2p_1 + 9p_2 + 5p_3 \geq v$$
$$10q_1 + 2q_3 \leq v$$
$$2q_1 + 9q_3 \leq v$$
$$5q_1 + 5q_3 \leq v$$

Uvođenjem smene $q_3=1-q_1$ dobija se:

$$2 + 8q_1 \leq v$$
$$9 - 7q_1 \leq v$$
$$5 \leq v$$

Sistem nejednačina se svodi na sistem jednačina i prikazuje grafički, kao na slici I-7.



Slika I-7. Očekivani gubitak drugog igrača

Igrač *B* nastoji da minimizira maksimalni gubitak pa se vrednost verovatnoće i vrednost igre očitavaju sa grafika kao koordinate tačke *N*: q_1^*=7/15 i ν =86/15. Optimalna mešovita strategija drugog igrača je: $Q^* = (q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*) = (7/15, 0, 8/15, 0)$.

Očigledno je da igrač *A* neće koristiti svoju čistu strategiju p_3, pa se optimalne mešovite strategije igrača *A* dobijaju rešenjem sistema nejednačina:

$$10p_1 + 2p_2 + 5 \cdot 0 \geq \nu \Rightarrow 10p_1 + 2p_2 \geq \frac{86}{15}$$

$$2p_1 + 9p_2 + 5 \cdot 0 \geq \nu \Rightarrow 2p_1 + 9p_2 \geq \frac{86}{15}$$

uz primenu poznate smene p_1=l-p_2. Vektor mešovite optimalne strategije igrača A je: $P^*=(p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*) = (7/15, 8/15, 0, 0)$.

Primer 4.6.2. Matrična igra je definisana matricom plaćanja A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1{,}2 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

Potrebno je uraditi sledeće:

a) Redukovati matricu plaćanja.
b) Na osnovu redukovane matrice, odrediti optimalnu vrednost početne matrične igre i optimalne strategije oba igrača.
c) Na osnovu rešenja pod b) naći rešenje u kome će verovatnoća izbora prve i četvrte strategije za prvog igrača biti iste.
d) Odrediti vrednost elemesnta a_{43} matrice plaćanja za koju bi matrična igra bila ravnopravna i za tu vrednost naći optimalne strategije oba igrača.

Rešenje. Definisana igra, koja je zadata matricom plaćanja A, je dimenzija 4×4 i predstavljena je u tabeli I-22.

Tabela I-22. Početna matrica plaćanja

Matrica plaćanja		**II igrač**				$\alpha_i = \min\limits_{j=1,2,3,4} a_{ij}$
		b_1	b_2	b_3	b_4	
I igrač	a_1	2	-2	1	-1	-2
	a_2	-1	2	-2	2	-2
	a_3	1	0	-1	1	-1
	a_4	1	-1,2	0,4	0	-1,2
$\beta_j = \max\limits_{i=1,2,3,4} a_{ij}$		2	2	1	2	/

Gornja i donja granica vrednosti matrične igre su:

$$\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \max(-2,-2,-1,-0{,}4) = -1$$

$$\beta = \min(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = \min(2,2,1,2) = 1$$

Igra je mešovita (α<β) i jedini zaključak koji se može izvesti je da će optimalna vrednost igre biti u intervalu od -1 do 1. Ovu matričnu igru, koja je dimenzija 4×4, nije moguće predstaviti grafički. Zato je potrebno prvo izvršiti redukciju matrice plaćanja, pa je tek onda, ako je moguće, rešiti grafički.

a) Redukcija matrice plaćanja

Ukoliko su dimenzije matrice plaćanja mxn, gde je m>2 i n>2, prvo je potrebno izvršiti redukciju matrice i svesti je na dimenzije mx2 ili 2xn ako je to moguće. Redukcija se zasniva, kao što je to do sada objašnjeno, na konceptu dominacije strategija. To je iterativni postupak i procedura se ponavlja sve dok je moguće eliminisati neku kolonu ili red iz redukovane matrice.

Tabela I-23. Postupak redukcije

Matrica plaćanja		**II igrač**			
		$\boldsymbol{b_1}$	$\boldsymbol{b_2}$	$\boldsymbol{b_3}$	$\boldsymbol{b_4}$
I igrač	$\boldsymbol{a_1}$	2	-2	1	-1
	$\boldsymbol{a_2}$	-1	2	-2	2
	$\boldsymbol{a_3}$	1	0	-1	1
	$\boldsymbol{a_4}$	1	-1,2	0,4	0

Prva iteracija

Međusobno poređenje redova matrice plaćanja:

- Uporediti strategiju a_1 sa a_2: pošto je $2>-1$ i $-2<2$, ne postoji dominacija među posmatranim strategijama i nije moguća eliminacija nijedne od njih.
- Uporediti strategiju a_1 sa a_3: pošto je $2>1$ i $-2<0$, ne postoji dominacija među posmatranim strategijama i nije moguća eliminacija nijedne od njih.
- Uporediti strategiju a_1 sa a_4: pošto je $2>1$ i $-2<-1.2$, ne postoji dominacija među posmatranim strategijama i nije moguća eliminacija nijedne od njih.
- Uporediti strategiju a_2 sa a_3: pošto je $-1<1$ i $2>0$, ne postoji dominacija među posmatranim strategijama i nije moguća eliminacija nijedne od njih.
- Uporediti strategiju a_2 sa a_4: pošto je $-1<1$ i $2>-1.2$, ne postoji dominacija među posmatranim strategijama i nije moguća eliminacija nijedne od njih.
- Uporediti strategiju a_3 sa a_4: pošto je 1= , $0>-1.2$ i $-1<0.4$, ne postoji dominacija među posmatranim strategijama i nije moguća eliminacija nijedne od njih.

Međusobno poređenje kolona matrice:

- Uporediti strategiju b_1, sa b_2: pošto je $2>-2$ i $-1<2$, ne postoji dominacija među posmatranim strategijama i nije moguća eliminacija nijedne od njih.
- Uporediti strategiju b_1, sa b_3: pošto je $2>1$, $-1>-2$, $1>-1$, $1>0,4$, svi elementi kolone b_1 su veći od elemenata kolons b_3. Zato je b_1 dominirana strategija koja neće nikada biti izabrana i eliminiše se, tj. $q_1^* = 0$.
- Uporediti strategiju b_2, sa b_3: pošto je $-2 < 1$ i $2 >-2$, ne postoji dominacija među posmatranim strategijama i nije moguća eliminacija nijedne od njih.
- Uporediti strategiju b_2, sa b_4: pošto je $-2<-1$, $2=2$, $0<1$ i $1,2<0$, svi elementi kolone b_4 su veći ili jednaki sa elemenatima kolone b_2. Zato je b_4 dominirana strategija koja neće nikada biti izabrana i eliminiše se, tj. $q_4^* = 0$.

Druga iteracija

Međusobno poređenje redova matrice plaćanja:

- Uporediti strategiju a_1 sa a_2: pošto je $-2<2$ i $1>-2$, ne postoji dominacija među posmatranim strategijama i nije moguća eliminacija nijedne od njih.
- Uporediti strategiju a_1 sa a_3: pošto je $-2<0$ i $1>-1$, ne postoji dominacija među posmatranim strategijama i nije moguća eliminacija nijedne od njih.
- Uporediti strategiju a_1 sa a_4: pošto je $-2<-1,2$ i $1>0.4$, ne postoji dominacija među posmatranim strategijama i nije moguća eliminacija nijedne od njih.

- Uporediti strategiju a_2 sa a_3: pošto je 2>0 i -2<-1, ne postoji dominacija među posmatranim strategijama i nije moguća eliminacija nijedne od njih.
- Uporediti strategiju a_2 sa a_4: pošto je 2>-1.2 i -2<0.4, ne postoji dominacija među posmatranim strategijama i nije moguća eliminacija nijedne od njih.
- Uporediti strategiju a_3 sa a_4: pošto je 0>-1.2 i -1<0.4, ne postoji dominacija među posmatranim strategijama i nije moguća eliminacija nijedne od njih.

Međusobno poređenje kolona matrice plaćanja:

- Kolone matrice b_2 i b_3 su međusobno već upoređivane što znači da ne postoji više nijedna dominanta strategija bilo kog igrača i redukcija je završena. Matrica plaćanja je redukovana na dimenzije 4x2, kao što je prikazano u tabeli I-24.

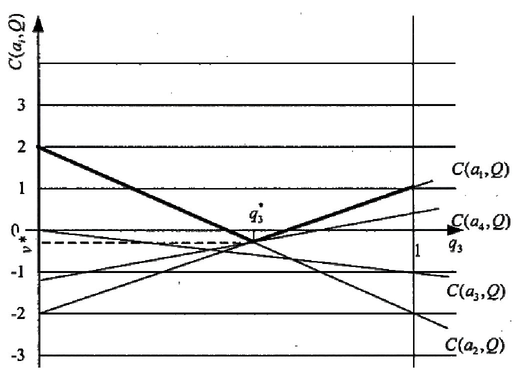
Tabela I-24. Redukovana matrica

Matrica plaćanja		**II igrač**	
		$\boldsymbol{b_2}$	$\boldsymbol{b_3}$
I igrač	$\boldsymbol{a_1}$	-2	1
	$\boldsymbol{a_2}$	2	-2
	$\boldsymbol{a_3}$	0	-1
	$\boldsymbol{a_4}$	-1.2	0.4

b) Pošto je igra dimenzija 4x2, potrebno je najpre odrediti optimalnu strategiju Q^* za igrača II. Vrednost igre se nalazi u granicama $-1 \leq v \leq 1$. Rešavanje igre započinje definisanjem sistema nejednačina:

$$
\begin{array}{lcl}
C(a_1,Q) = -2q_2 + q_3 \leq v & & C(a_1,Q) = -2 + 3q_3 \leq v \\
C(a_2,Q) = 2q_2 - 2q_3 \leq v & & C(a_2,Q) = 2 - 4q_3 \leq v \\
C(a_3,Q) = -q_3 \leq v & \Rightarrow & C(a_3,Q) = -q_3 \leq v \\
C(a_4,Q) = -1{,}2q_2 + 0{,}4q_3 \leq v & & C(a_4,Q) = -1{,}2 + 1{,}6q_3 \leq v \\
q_2 + q_3 = 1 \Rightarrow q_2 = 1 - q_3 & & 0 \leq q_3 \leq 1
\end{array}
$$

Sistem nejednačina se svodi na sistem jednačina i prikazuje grafički, kao na slici I-8.



Slika I-8. Grafički prikaz rešenja za igrača II

Sa slike se vidi da je minimalni od svih maksimalnih gubitaka određen presekom (q_3^*, v^*) pravih $C(a_1, Q)$, $C(a_2, Q)$ i $C(a_4, Q)$. Za nalaženje koordinata ovog preseka dovoljno je izračunati presek npr. pravih $C(a_1, Q)$ i $C(a_2, Q)$:

$$-2 + 3q_3 = 2 - 4q_3 \rightarrow q_3^* = 4/7, \; q_2^* = 3/7.$$

Vektor optimalne mešovite strategije za igrača II je: $Q^*=(q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*) = (0, 3/7, 4/7, 0)$.

Vrednost igre $\nu^* = -2 + 3q_3 = -2 + 3\cdot 4/7 = -2/7$.

Igrač I na osnovu slike 4.6.2.1. zaključuje da, pošto je $C(a_3, Q^*) < \nu^*$, u optimalnoj strategiji P^* on ne treba da igra strategiju a_3, tj. $p_3=0$, pa se matrica svodi na:

Tabela I-25. Matrica za igrača I

Matrica plaćanja		**II igrač**	
		b_2	b_3
I igrač	a_1	-2	1
	a_2	2	-2
	a_4	-1,2	0,4

Pošto je $C(a_1, Q^*) = C(a_2, Q^*) = C(a_4, Q^*) = \nu^*$, igrač I ima više optimalnih strategija, koje se mogu naći na sledeći način:

Slučaj 1. $p_3^*=0,\ p_4^*=0$

Matrica plaćanja		**II igrač**	
		b_2	b_3
I igrač	a_1	-2	1
	a_2	2	-2

$$
\begin{array}{lcl}
C(P,b_2) = -2p_1 + 2p_2 = \nu^* & & 2-4p_1 = -2+3p_1 \\
C(P,b_3) = p_1 - 2p_2 = \nu^* & \Rightarrow & p_1 = 4/7,\quad p_2 = 3/7 \\
p_1 + p_2 = 1 \Rightarrow p_2 = 1 - p_1 & & P^{*'} = (4/7, 3/7, 0, 0);\ \ \nu = -2/7
\end{array}
$$

Slučaj 2. $p_3^*=0,\ p_2^*=0$

Matrica plaćanja		**II igrač**	
		b_2	b_3
I igrač	a_1	-2	1
	a_4	-1,2	0,4

$$
\begin{array}{lcl}
C(P,b_2) = -2p_1 - 1{,}2p_4 = \nu^* & & -1{,}2 - 0{,}8p_1 = 0{,}4 + 0{,}6p_1 \\
C(P,b_3) = p_1 + 0{,}4p_4 = \nu^* & \Rightarrow & p_1 = -1{,}4/1{,}6 < 0 \\
p_1 + p_4 = 1 \Rightarrow p_4 = 1 - p_1 & & \textit{Nedopustivo rešenje}
\end{array}
$$

Slučaj 3. $p_3^*=0,\ p_1^*=0$

Matrica plaćanja		**II igrač**	
		b_2	b_3
I igrač	a_2	2	-2
	a_4	-1,2	0,4

$$
\begin{array}{lcl}
C(P,b_2) = 2p_2 - 1{,}2p_4 = \nu^* & & -1{,}2 + 3{,}2p_2 = 0{,}4 - 2{,}4p_2 \\
C(P,b_3) = -2p_2 + 0{,}4p_4 = \nu^* & \Rightarrow & p_2 = 2/7,\quad p_4 = 5/7 \\
p_2 + p_4 = 1 \Rightarrow p_4 = 1 - p_2 & & P^{*''} = (0, 2/7, 0, 5/7);\ \ \nu = -2/7
\end{array}
$$

Sve optimalne strategije igrača I imaju oblik: $P^* = \lambda\cdot P^{*'} + (1-\lambda)P^{*''},\ 0 \le \lambda \le 1$.

Komentar rešenja. Igrač II će u 3/7 slučajeva igrati drugu, a u 4/7 slučajeva treću strategiju, pri čemu će ostvariti dobit od 2/7. Prvi igrač ima dva bazična optimalna rešenja. Njihovom konveksnom kombinacijom možemo dobiti beskonačno mnogo optimalnih strategija (uzimajući razne vrednosti za parametar λ) definisanih kao $P^* = (4\lambda/7, 2/7+\lambda/7, 0, 5/7 - 5\lambda/7)$, za svako $\lambda \in [0,1]$. Bez obzira koju strategiju da izabere prvi igrač gubi 2/7.

c) Prema strategiji pod b) $P^* = \lambda\cdot(4/7, 3/7, 0, 0) + (1 - \lambda)\cdot(0, 2/7, 0, 5/7) = (4\lambda/7, 2/7+\lambda/7, 0, 5/7 - 5\lambda/7)$ ako treba da bude zadovoljen uslov $p_1^* = p_4^*$ tada λ treba da zadovolji sledeći uslov:

$$4\lambda/7 = 5/7 - 5\lambda/7 \Rightarrow 5\lambda/9.$$

Za ovu vrednost λ optimalna strategija P^* dobija oblik $P^* = (20/63, 23/63, 0, 20/63)$, a optimalna strategija Q^* ostaje ista kao pod b). Vrednost igre takođe ostaje nepromenjena.

d) Matrična igra je ravnopravna ako je $v^* = 0$ (niko ne dobija niti gubi). Ukoliko se problem ponovo rešava po drugom igraču dobiće se:

Matrica plaćanja		**II igrač**	
		b_2	b_3
I igrač	a_1	-2	1
	a_2	2	-2
	a_3	0	-1
	a_4	-1,2	a_{43}

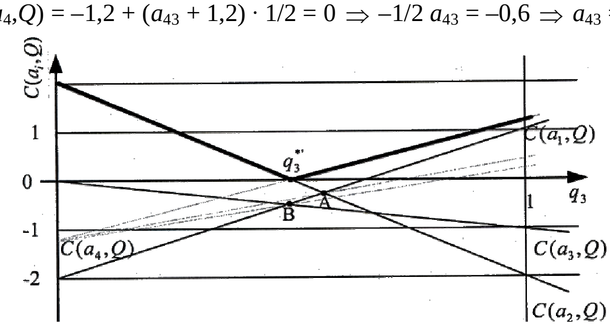
$$\begin{aligned} &C(a_1,Q) = -2q_2 + q_3 \le v \\ &C(a_2,Q) = 2q_2 - 2q_3 \le v \\ &C(a_3,Q) = -q_3 \le v \\ &C(a_4,Q) = -1{,}2q_2 + c_{43}q_3 \le v \\ &q_2 + q_3 = 1 \Rightarrow q_2 = 1 - q_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &C(a_1,Q) = -2 + 3q_3 \le v \\ &C(a_2,Q) = 2 - 4q_3 \le v \\ &C(a_3,Q) = -q_3 \le v \\ &C(a_4,Q) = -1{,}2 + (c_{43} + 1{,}2)q_3 \le v \\ &0 \le q_3 \le 1 \end{aligned}$$

Na slici I-9. se vidi da prava $C(a_4,Q)$ prolazi kroz tačku (0; -1,2), a njen pravac zavisi od vrednosti a_{43}. Neki mogući pravci prave $C(a_4,Q)$ su prikazani isprekidanim linijama. Očigledno je da će, ako prava $C(a_4,Q)$ prolazi kroz presek prave $C(a_2,Q)$ sa apscisom, optimalna strategija q_3^* biti određena ovim presekom, a v^* će biti jednako 0 (videti podebljane linije na slici). Zato se vrednost a_{43} izračunava na sledeći način:

$$C(a_2,Q) = 2 - 4q_3 = 0 \Rightarrow q_3 = 1/2$$

što znači da $C(a_4,Q)$ treba da prođe kroz tačku (1/2, 0), tj. da važi:

$$C(a_4,Q) = -1{,}2 + (a_{43} + 1{,}2)\cdot 1/2 = 0 \Rightarrow -1/2\, a_{43} = -0{,}6 \Rightarrow a_{43} = 1{,}2$$



Slika I-9. Matrična igra sa parametrom

Optimalna strategija Q^* za igrača II za a_{43} =1,2 ima oblik:

$$Q^* = (q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*) = (0, 1/2, 1/2, 0), \text{ dok je vrednost igre } v^* = 0.$$

Pošto su $C(a_1,Q^*) < v^*$ i $C(a_3,Q^*) < v^*$, igrač I u optimalnoj strategiji P^* odbacuje strategije a_1 i a_3, tj. $p_1^* = p_3^* = 0$, tako da sada imamo situaciju koja je prikazana u tabeli I-26.

Tabela I-26. Redukovana matrica plaćanja

Matrica plaćanja		**II igrač**	
		b_2	b_3
I igrač	a_2	2	-2
	a_4	-1,2	1,2

$$\begin{aligned} &C(P,b_2) = 2p_2 - 1{,}2p_4 = v^* \\ &C(P,b_3) = -2p_2 + 1{,}2p_4 = v^* \\ &p_2 + p_4 = 1 \Rightarrow p_4 = 1 - p_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &-1{,}2 + 3{,}2p_2 = 1{,}2 - 3{,}2p_2 \\ &p_2 = 3/8, \quad p_4 = 5/8 \\ &P^* = (0{,}3/8{,}0{,}5/8); \quad v = 0 \end{aligned}$$

Optimalna strategija P^* za igrača I za a_{43} =1,2 ima oblik:

$$P^* = (p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*) = (0, 3/8, 0, 5/8), \text{ dok je vrednost igre } v^* = 0.$$

4.7. Rešavanje matričnih igara primenom LP

Svaka konačna antagonistička matrična igra može biti rešena primenom linearnog programiranja. Time su rešene teškoće rešavanja matričnih igara sa matricom plaćanja većih dimenzija. Ovde ćemo pokazati kako se antagonistička matrična igra svodi na par dualnih problema linearnog programiranja. U svojoj knjizi "*Linearno programiranje i proširenja*" G. Dantzig je 1951. godine dokazao vezu između matričnih igara i linearnog programiranja.

Za formiranje odgovarajućih matematičkih modela polazi se od antagonističke matrične igre koja je definisana matricom plaćanja (2.1.1). Pretpostavlja se da su svi elementi matrice a_{ij} pozitivni (ovo se može uvek obezbediti), što će obezbediti da vrednost igre v, takođe, bude pozitivna.

Posmatramo najpre igrača A. Njegova optimalna strategija P^* odlikuje se osobinom da njome on dobija najmanje vrednost igre v, bez obzira na to koju strategiju odabere igrač B. Tako, ako igrač B bira prvu strategiju $Q_1 = \{1,0,...,0\}$, a igrač A optimalnu strategiju $P^* = \{p_1, ..., p_m\}$, onda srednja vrednost dobitka igrača A iznosi

$$\mathrm{E}(P^*, Q_1) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{m1}p_m.$$

Kako ova srednja vrednost ne može biti manja od vrednosti igre v, dobijamo nejednačinu:

$$\mathrm{E}(P^*, Q_1) = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{m1}p_m \geq v.$$

Slične nejednačine dobijamo i za sve ostale strategije igrača B, tako da one formiraju sledeći sistem nejednačina:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, p_i \geq v\,, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{4.7.1}$$

Ovom sistemu nejednačina treba dodati i uslove koje moraju zadovoljiti verovatnoće p_i:

$$p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots , m \tag{4.7.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1. \tag{4.7.3}$$

Kada sistem nejednačina (4.7.1) i jednačinu (4.7.3) podelimo sa vrednošću v igre, dobija se:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{v} a_{ij} \geq 1, \quad j = 1, 2, \dots , n \tag{4.7.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{v} = \frac{1}{v}. \tag{4.7.5}$$

Uvodeći u izraze (4.7.4) i (4.7.5) sledeću smenu:

$$\frac{p_i}{v} = y_i, \quad i = 1, 2, \dots , m \tag{4.7.6}$$

dobija se:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \geq 1, \quad j = 1, \dots , n \tag{4.7.7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = \frac{1}{v}. \tag{4.7.8}$$

Kako je $v>0$ i $p_i \geq 0$ za svako i, to će i nove promenljive y_i sigurno biti nenegativne, tj. važiće:

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots , m. \tag{4.7.9}$$

Analiziramo sada jednačinu (4.7.8). Igrač A nastoji da svojom strategijom što više poveća vrednost igre v. On će to postići ako u jednačini (4.7.8) što više smanji njenu recipročnu vrednost $1/v$, odnosno

$$\min \sum_{i=1}^{m} y_i = \frac{1}{\max v}. \tag{4.7.10}$$

Polazeći od matematičkog modela matrične igre za igrača A, dobijaju se svi elementi modela linearnog programiranja. Potrebno je da se minimizira vrednost funkcije kriterijuma:

$$g_0 = \sum_{i=1}^{m} y_i \tag{4.7.11}$$

uz ograničenja (4.7.7) i (4.7.9). Ovaj linearni model može se lako rešiti. Njegovim rešavanjem dobijamo vrednost promenljivih y_i, kao i vrednost funkcije kriterijuma g_0. Nakon toga, na osnovu (4.7.8), najpre se odredi vrednost matrične igre v (kao recipročna vrednost utvrđene vrednosti funkcije kriterijuma g_0), a zatim se iz jednačina (4.7.6) odrede i komponente vektora optimalne strategije igrača *A*:

$$p_i = v\,y_i \;,\quad i = 1, ..., m.$$

Na sličan način formiramo linearni model i za igrača *B*. Njegova optimalna strategija Q^* ima osobinu da on njome gubi najviše vrednost igre *v*, bez obzira na to koju strategiju odabere igrač *A*. Od očekivanih srednjih vrednosti gubitaka igrača *B* za pojedine čiste strategije igrača *A* formira se sledeći sistem nejednačina:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} q_j \le v\,,\quad i = 1, 2, ..., m \tag{4.7.12}$$

kojima dodajemo i uslove koje moraju zadovoljiti verovatnoće q_j:

$$q_j \ge 0,\quad j = 1,... , n \tag{4.7.13}$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1. \tag{4.7.14}$$

Kada sistem nejednačina (4.7.12) i jednačinu (4.7.14) podelimo sa *v*, dobijamo:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{q_j}{v} \le 1,\quad i = 1, ..., m \tag{4.7.15}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{v} = \frac{1}{v}. \tag{4.7.16}$$

Uvodeći smenu:

$$\frac{q_j}{v} = x_j\,,\quad j = 1, 2, ... , n \tag{4.7.17}$$

U izraze (4.7.15) i (4.7.16) dobija se sledeći linearni problem:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le 1\,,\quad i = 1, ... , m \tag{4.7.18}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{1}{v}. \tag{4.7.19}$$

Kako je $v > 0$ i verovatnoće $q_j \ge 0$ za svako *j*, to će i promenljive x_j sigurno biti nenegativne, tj.

$$x_j \ge 0,\quad j = 1,... , n \tag{4.7.20}$$

Sada analiziramo jednačinu (4.7.19). Igrač *B* nastoji da svojom strategijom što je moguće više smanji vrednost igre *v*. On će to postići ako u jednačini (4.7.19) što više poveća recipročnu vrednost $1/v$, odnosno:

$$\max \sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{1}{\min v} \tag{4.7.21}$$

Tako smo, na osnovu matematičkog modela matrične igre za igrača *B*, dobili sve elemente za model linearnog programiranja. Treba pronaći maksimalnu vrednost funkcije kriterijuma

$$z_0 = \sum_{j=1}^{n} x_j \tag{4.7.22}$$

uz ograničenja (4.7.18), (4.7.20). Kada rešimo ovaj linearni model, kao optimalno rešenje dobijamo vrednost promenljivih x_j i odgovarajuću vrednost funkcije kriterijuma z_0. Nakon toga, pomoću jednačine (4.7.19) odredimo vrednost matrične igre v ($v = 1/z_0$), a zatim pomoću jednačine (4.7.17) odredimo i komponente vektora optimalne strategije igrača *B*:

$$q_j = v\, x_j, \quad j = 1,\dots, n.$$

Lako se može videti da su oba linearna modela, koja smo koristili za izračunavanje optimalnih strategija dva igrača, međusobno povezana i jedan drugom su dualni. Time smo pokazali da se rešavanje antagonističke matrične igre može svesti na rešavanje para dualnih problema linearnog programiranja. Ranije smo videli da nije potrebno rešavati oba linearna modela. Dovoljno će biti da rešimo jedan od modela jer to rešenje sadrži i rešenje njegovog dualnog modela.

Primer 4.7.1. Potrebno je da se reši matrična igra dva igrača, koja je određena matricom plaćanja *A*.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 8 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Rešenje. Lako se može utvrditi da matrica nema sedlastu tačku. Donja vrednost igre je: $a_i^* = max_i\, min_j\, a_{ij} = 3$, a gornja $b_j^* = min_j\, max_i\, a_{ij} = 5$, pa će se vrednost igre nalaziti u granicama $3 \le v \le 5$. To znači da se rešenje igre nalazi u domenu mešovitih strategija. Verovatnoće izbora pojedinih alternativa označićemo sa p_1, p_2 i p_3 za igrača *A* i sa q_1, q_2 i q_3 za igrača *B*. Odgovarajući matematički model za određivanje optimalne strategije za igrača *A* ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned} 2p_1 + 8p_2 + 4p_3 &\ge v, \\ 5p_1 + 3p_2 + 3p_3 &\ge v, \\ 4p_1 + p_2 + 6p_3 &\ge v, \\ p_1 + p_2 + p_3 &= 1, \\ p_i \ge 0, \ i &= 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{4.7.23}$$

Matematički model za određivanje optimalne strategije igrača B ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned} 2q_1 + 5q_2 + 4q_3 &\le v, \\ 8q_1 + 3q_2 + q_3 &\le v, \\ 4q_1 + 3q_2 + 6q_3 &\le v, \\ q_1 + q_2 + q_3 &= 1, \\ q_j \ge 0, \ j &= 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{4.7.24}$$

Rešenja se traže pomoću modela linearnog programiranja. Zato je potrebno formirati odgovarajuće linearne modele. Rešavaćemo samo model (4.7.24). Pošto ovaj sistem podelimo sa v i uvedemo smenu:

$$\frac{q_1}{v} = x_1, \quad \frac{q_2}{v} = x_2, \quad \frac{q_3}{v} = x_3,$$

dobijamo sledeći model linearnog programiranja:

$$\max \ z_0 = x_1 + x_2 + x_3,$$
$$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 1,$$
$$8x_1 + 3x_2 + x3 \le 1,$$
$$4x_1 + 3x_2 + 6x3 \le 1,$$
$$x_j \ge 0, \ j = 1, 2, 3.$$

Ovaj problem možemo rešiti bilo kojim algoritmom simpleks metoda. U tabeli I-27. dato je optimalno rešenje ovog problema.

Tabela I-27. Optimalno rešenje primera 4.7.1.

C			**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
C_b	x_b	***B***	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	x_2	**9/71**	0	1	0	22/71	2/71	-15/71
1	x_1	**5/71**	1	0	0	-15/142	9/71	7/142
1	x_3	**4/71**	0	0	1	-6/71	-7/71	17/71
$F_j - C_j$		**18/71**	0	0	0	17/142	4/71	11/142

Iz tabele se vidi da je rešenje primarnog problema:

$$x_1 = \frac{5}{71}, \quad x_2 = \frac{9}{71}, \quad x_3 = \frac{4}{71},$$

a odgovarajuća vrednost funkcije kriterijuma $z_0 = 18/71$.

Iz tabele se, takođe, vidi i rešenje dualnog problema:

$$y_1 = \frac{17}{142}, \quad y_2 = \frac{4}{71}, \quad y_3 = \frac{11}{142},$$

sa vrednošću funkcije kriterijuma $g_0 = z_0 = 18/71$.

Na osnovu rešenja primarnog problema određujemo optimalnu strategiju za igrača B. Najpre određujemo vrednost igre:

$$v = \frac{1}{z_0} = \frac{71}{18},$$

a zatim i verovatnoće q_j:

$$q_1 = v \cdot x_1 = \frac{71}{18}\frac{5}{71} = \frac{5}{18},$$
$$q_2 = v \cdot x_2 = \frac{71}{18}\frac{9}{71} = \frac{9}{18},$$
$$q_3 = v \cdot x_3 = \frac{71}{18}\frac{4}{71} = \frac{4}{18}.$$

Optimalnu strategiju igrača A određujemo na osnovu rešenja dualnog problema:

$$p_1 = v \cdot y_1 = \frac{71}{18}\frac{17}{142} = \frac{17}{36},$$
$$p_2 = v \cdot y_2 = \frac{71}{18}\frac{4}{71} = \frac{8}{36},$$
$$p_3 = v \cdot y_3 = \frac{71}{18}\frac{11}{142} = \frac{11}{36}.$$

Primer 4.7.2. Na osnovu dosadašnje velike potražnje aranžmana za letovanje u Bugarskoj, putnička agencija „*XYZ*“, odlučila je da za nastupajuću sezonu, svojim klijentima, ponudi letovanje na Crnom moru. „*XYZ*“ treba da ugovori letovanje po što povoljnijim cenama u sledećim mestima: Nesebar, Sunčev Breg, Pomorie, Černomorec, Kiten i Sozopol. Zadatak ove putničke agencije je da u jednom ili više letovališta obezbedi 100 ležajeva po smeni, u postojećim kapacitetima, za period: Jun, Jul i Avgust. Organizator iz Bugarske, kao odgovor na zahteve, može da predloži 100 ležajeva po smeni u sledećim smeštajnim kapacitetima: hoteli *A* kategorije, hoteli *B* kategorije, privatni smeštaj i bungalovi. U zavisnosti od izbora letovališta i vrste smeštaja, organizator iz Bugarske je u mogućnosti da ponudi bonitete putnička agencija „XYZ“, na sledeći način:

- za Nesebar:
  9% popusta za hotele *A* kategorije,
  8% popusta za hotele *B* kategorije,
  4% popusta za privatni smeštaj,
  8% popusta za bungalove;
- za Sunčev Breg:
  7% popusta za hotele *A* kategorije,
  2% popusta za hotele *B* kategorije,
  6% popusta za privatni smeštaj,
  9% popusta za bungalove;
- Za Pomorie:
  4% popusta za hotele *A* kategorije,
  4% popusta za hotele *B* kategorije,
  8% popusta za privatni smeštaj,
  6% popusta za bungalove;
- za Černomorec:
  2% popusta za hotele *A* kategorije,
  7% popusta za hotele *B* kategorije,
  5% popusta za privatni smeštaj,
  4% popusta za bungalove;
- za Kiten:
  5% popusta za hotele *A* kategorije,
  3% popusta za hotele *B* kategorije,
  3% popusta za privatni smeštaj,
  5% popusta za bungalove;
- za Sozopol:
  3% popusta za hotele *A* kategorije,
  3% popusta za hotele *B* kategorije,
  5% popusta za privatni smeštaj,
  9% popusta za bungalove.

a) Postaviti model LP za organizatora iz Bugarske, kao učesnika u matričnoj igri i rešiti ga simpleks tabelom;

b) Koliki je bonitet za putničku agenciju „*XYZ*“ ukoliko i ona i organizator iz Bugarske izaberu optimalne strategije?

c) Pronaći optimalne strategije za putničku agenciju „*XYZ*“ i organizatora iz Bugarske. U kojim će letovalištima u Bugarskoj putnička agencija „*XYZ*“ organizovati letovanje za narednu sezonu? Koje će smeštajne kapacitete i u kojim letovalištima organizator iz Bugarske ugovoriti sa putničkom agencijom“?

d) Problem rešiti korišćenjem programskog paketa „LINDO“.

Rešenje.

a) Podatke iz problema možemo prikazati u tabelarnom obliku, tabela I-28., gde su vrednosti u matrici plaćanja izražene u %.

Tabela I-28. Matrica plaćanja

			Organizator iz Bugarske – igrač *B*			
„*XYZ*“- igrač *A*			b_1	b_2	b_3	b_4
			Hoteli *A* kategorije	**Hoteli *B* kategorije**	**Privatni smeštaj**	**Bungalovi**
	a_1	**Nesebar**	9	8	4	8
	a_2	**Sunčev Breg**	7	2	6	9
	a_3	**Pomorie**	4	4	8	6
	a_4	**Černomorec**	2	7	5	4
	a_5	**Kiten**	5	3	3	5
	a_6	**Sozopol**	3	3	5	9

Za igrača *A* je strategija a_1 dominantna u odnosu na strategiju a_5, jer će igrač *A* uvek dobiti više ako odabere prvu strategiju u odnosu na petu, bez obzira koju strategiju bira igrač *B* (svaki element matrice plaćanja u prvom redu je veći od odgovarajućih elemenata u petom redu). Prema tome, igrač *A* odbacuje petu strategiju (Kiten) kao nepovoljnu. Sada je, u daljem razmatranju, Sozopol alternativa a_5. Na ovaj način je, postupkom redukcije, problem matrične igre sveden sa dimenzija 6x4 na 5x4. U daljem postupku tražimo optimalnu strategiju koja će za igrača *A* doneti minimalno mogući srednji dobitak, a za igrača *B* maksimalno mogući srednji gubitak, kao što je prikazano tabelom I-29.

Tabela I-29. Određivanje sedlaste tačke

			Igrač *B*					
Igrač *A*			(q_1) b_1	(q_2) b_2	(q_3) b_3	(q_4) b_4	$\min\limits_j$	
	(p_1)	a_1	9	8	4	8	4	$\max\limits_i \min\limits_j = 4$
	(p_2)	a_2	7	2	6	9	2	
	(p_3)	a_3	4	4	8	6	4	
	(p_4)	a_4	2	7	5	4	2	
	(p_5)	a_5	3	3	5	9		
	$\max\limits_i$		9	8	8	9		
	$\min\limits_j \max\limits_i = 8$							

Kako u ovom slučaju ne postoji *sedlasta tačka* optimalna strategija više nije u sistematskoj primeni jedne strategije (alternative), već se ona dobija kombinacijom primene više strategija (alternativa) sa odgovarajućom verovatnoćom, gde su:

- p_i - predstavljaju verovatnoće da je igrač *A* izabrao *i*-tu strategiju, i
- q_j - predstavljaju verovatnoće da je igrač *B* izabrao *j*-tu strategiju.

Vrednosti a_{ij} (u tabeli prikazane kao %) predstavljaju bonitet u slučaju da je igrač *A* izabrao *i*-tu, a igrač *B* *j*-tu strategiju. Vektori mešovitih strategija igrača *A* i *B* se mogu predstaviti kao:

$A: P = P(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5);$ gde je: $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$
$B: Q = Q(q_1, q_2, q_3, q_4);$ gde je: $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$

Vrednost matrične igre se nalazi između 4 i 8, tj. $4 \leq v \leq 8$.

Matrica plaćanja se ne može dalje redukovati na matircu dimenzija $2\times n$, $m\times 2$ ili 2×2 kako bi se primenio analitički ili grafički metod, te se matrična igra može rešiti primenom linearnog programiranja. Matematički model predstavljamo prema igraču *B* (ukoliko postavimo model prema igraču *A*, problem se usložnjava obzirom da se moraju uvoditi i veštačke i dodatne promenljive, pošto su mu ograničenja tipa „≥“) na sledeći način:

Funkcija cilja: $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$

Ograničenja:

$$9q_1 + 8q_2 + 4q_3 + 8q_4 \leq v$$
$$7q_1 + 2q_2 + 6q_3 + 9q_4 \leq v$$
$$4q_1 + 4q_2 + 8q_3 + 6q_4 \leq v$$
$$2q_1 + 7q_2 + 5q_3 + 4q_4 \leq v$$
$$3q_1 + 3q_2 + 5q_3 + 9q_4 \leq v$$
$$q_j \geq 0,\ j=1,2,3,4$$

Pošto ovaj sistem nejednačina podelimo sa v dobijamo:

Funkcija cilja: $\frac{q_1}{v} + \frac{q_2}{v} + \frac{q_3}{v} + \frac{q_4}{v} = \frac{1}{v}$

Ograničenja:

$$9 \cdot \frac{q_1}{v} + 8 \cdot \frac{q_2}{v} + 4 \cdot \frac{q_3}{v} + 8\frac{q_4}{v} \leq 1$$
$$7 \cdot \frac{q_1}{v} + 2 \cdot \frac{q_2}{v} + 6 \cdot \frac{q_3}{v} + 9\frac{q_4}{v} \leq 1$$
$$4 \cdot \frac{q_1}{v} + 4 \cdot \frac{q_2}{v} + 8 \cdot \frac{q_3}{v} + 6\frac{q_4}{v} \leq 1$$
$$2 \cdot \frac{q_1}{v} + 7 \cdot \frac{q_2}{v} + 5 \cdot \frac{q_3}{v} + 4\frac{q_4}{v} \leq 1$$
$$3 \cdot \frac{q_1}{v} + 3 \cdot \frac{q_2}{v} + 5 \cdot \frac{q_3}{v} + 9\frac{q_4}{v} \leq 1$$

Uvođenjem smene: $\frac{q_1}{v} = x_1, \frac{q_2}{v} = x_2, \frac{q_3}{v} = x_3, \frac{q_4}{v} = x_4$

dobijamo sledeći matematički model linearnog programiranja:

$$max\ \ F(X) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{v}$$

$$
\begin{aligned}
&9x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 8x_4 \le 1\\
&7x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 9x_4 \le 1\\
&4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 \le 1\\
&2x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 \le 1\\
&3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 9x_4 \le 1\\
&x_j \ge 0,\ \text{j=1,2,3,4}
\end{aligned}
$$

Pošto se izvrši prilagođavanje modela za primenu simpleks metoda, dobija se:

$$
\begin{aligned}
&max\ \ F(X) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 0{*}(\ x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9)\\
&\text{p.o.}\quad 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_5 = 1\\
&\qquad 7x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 9x_4 + x_6 = 1\\
&\qquad 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 + x_7 = 1\\
&\qquad 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 + x_8 = 1\\
&\qquad 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 9x_4 + x_9 = 1\\
&\qquad x_j \ge 0,\ j=1,2,3,4...9
\end{aligned}
$$

Kroz četiri iteracije došlo se do rešenja, prikazano u tabelama od I-30. do I-34.

Tabela I-30. Početna Simpleks tabela ST_0

C			1	1	1	1	0	0	0	0	0	$\theta=\frac{b_j}{a_{ij}}$
C_b	**x_b**	**B**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**	**x_7**	**x_8**	**x_9**	
0	**x_5**	1	9	8	4	8	1	0	0	0	0	0.111
0	**x_6**	1	7	2	6	9	0	1	0	0	0	0.143
0	**x_7**	1	4	4	8	6	0	0	1	0	0	0.250
0	**x_8**	1	2	7	5	4	0	0	0	1	0	0.500
0	**x_9**	1	3	3	5	9	0	0	0	0	1	0.333
F_j - C_j		0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	

Iz tabele ST_0 vidimo da u bazu ulazi promenljiva x_1, a izlazi promenljiva x_5. Na osnovu dobijenih rezultata formiramo novu Simpleks tabelu *ST*_1, predstavljenu tabelom I-31.

Tabela I-31. Simpleks tabela nakon prve iteracije ST_1

C			1	1	1	1	0	0	0	0	0	$\theta=\frac{b_j}{a_{ij}}$
C_b	**x_b**	**B**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	**x_6**	**x_7**	**x_8**	**x_9**	
1	**x_1**	0.111	1	0.889	0.444	0.889	0.111	0	0	0	0	0.250
0	**x_6**	0.222	0	-4.22	2.889	2.778	-0.78	1	0	0	0	0.077
0	**x_7**	0.556	0	0.444	6.222	2.444	-0.44	0	1	0	0	0.089
0	**x_8**	0.778	0	5.222	4.111	2.222	-0.22	0	0	1	0	0.189
0	**x_9**	0.667	0	0.333	3.667	6.333	-0.33	0	0	0	1	0.182
F_j - C_j		0.111	0	-0.11	-0.56	-0.11	0.111	0	0	0	0	

Iz tabele *ST*_1 vidimo da u bazu ulazi promenljiva x_3, a izlazi promenljiva x_6. Na osnovu dobijenih rezultata formiramo novu Simpleks tabelu *ST*_2, predstavljenu tabelom I-32.

Tabela I-32. Simpleks tabela nakon druge iteracije ST_2

C			1	1	1	1	0	0	0	0	0	
C_b	x_b	*B*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	$\theta = \frac{b_j}{a_{ij}}$
1	x_1	0.077	1	1.538	0	0.462	0.231	-0.15	0	0	0	0.050
1	x_3	0.077	0	-1.46	1	0.962	-0.27	0.346	0	0	0	/
0	x_7	0.077	0	**9.538**	0	-3.54	1.231	-2.15	1	0	0	0.008
0	x_8	0.462	0	11.23	0	-1.73	0.885	-1.42	0	1	0	0.041
0	x_9	0.385	0	5.692	0	2.808	0.654	-1.27	0	0	1	0.068
$F_j - C_j$		0.154	0	-0.92	0	0.423	-0.04	0.192	0	0	0	

Iz tabele *ST*_2 vidimo da u bazu ulazi promenljiva x_2, a izlazi promenljiva x_7. Na osnovu dobijenih rezultata formiramo novu Simpleks tabelu *ST*_3, predstavljenu tabelom I-33.

Tabela I-33. Simpleks tabela nakon treće iteracije ST_3

C			1	1	1	1	0	0	0	0	0	
C_b	x_b	*B*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	$\theta = \frac{b_j}{a_{ij}}$
1	x_1	0.065	1	0	0	1.032	0.032	**0.194**	-0.16	0	0	0.333
1	x_3	0.089	0	0	1	0.419	-0.08	0.016	0.153	0	0	5.5
1	x_2	0.008	0	1	0	-0.37	0.129	-0.23	0.105	0	0	/
0	x_8	0.371	0	0	0	2.435	-0.56	1.113	-1.18	1	0	0.333
0	x_9	0.339	0	0	0	4.919	-0.08	0.016	-0.60	0	1	21
$F_j - C_j$		0.161	0	0	0	0.081	0.081	-0.02	0.097	0	0	

Iz tabele *ST*_3 vidimo da u bazu ulazi promenljiva x_6, a izlazi promenljiva x_1. Na osnovu dobijenih rezultata formiramo novu Simpleks tabelu *ST*_4, predstavljenu tabelom I-34.

Tabela I-34. Simpleks tabela nakon četvrte iteracije ST_4

C			1	1	1	1	0	0	0	0	0
C_b	x_b	*B*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
0	x_6	**0.333**	5.167	0	0	5.333	0.167	1	-0.83	0	0
1	x_3	**0.083**	-0.08	0	1	0.333	-0.08	0	0.167	0	0
1	x_2	**0.083**	1.167	1	0	0.833	0.167	0	-0.08	0	0
0	x_8	**0**	-5.75	0	0	-3.50	-0.75	0	-0.25	1	0
0	x_9	**0.333**	-0.08	0	0	4.833	-0.08	0	-0.58	0	1
$F_j - C_j$		**0.167**	0.083	0	0	0.167	**0.083**	**0**	**0.083**	**0**	**0**

Optimalno rešenje primarnog modela je: x_2= 0.083; x_3= 0.083; x_6= 0.333; x_8= 0; x_9= 0.333

Maksimalna vrednost funkcije cilja iznosi: $maxF(x)$ = 0.167. Kako je $maxF(x)$ =1/v, dobija se da je vrednost matrične igre:

$$v = \frac{1}{\max F(x)} = \frac{1}{0{,}167} = 5{,}988 \cdot$$

U model smo uveli smenu:

$$\frac{q_j}{v} = x_j\,,\ \ j\text{=1,2,3,4}$$

iz koje određujemo da je:

$$q_j = v\,.\,x_j,\ \ j\text{=1,2,3,4}$$

odnosno:

$$q_1 = V{\cdot}x_1 = 5.988 \cdot 0 = 0$$
$$q_2 = V{\cdot}x_2 = 5.988 \cdot 0.083 = 0{,}497 \approx 0.5$$
$$q_3 = V{\cdot}x_3 = 5.988 \cdot 0.083 = 0{,}497 \approx 0.5$$
$$q_4 = V{\cdot}x_4 = 5.988 \cdot 0 = 0$$

pa je:

$$Q^{*}= (\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4) = (0;\ 0{,}5;\ 0{,}5;\ 0)$$

Optimalno rešenje dualnog problema je: y_1=0,083; y_2=0: y_3=0,083; y_4=0; y_5=0. Pošto je izvršena smena u matematički model za prvog igrača u obliku:

$$\frac{p_i}{v} = y_i\,,\ i\text{=1,2,3,4,5}$$

dobijamo da je:

$$p_{\mathrm{i}} = V{\cdot}y_{\mathrm{i}},\ \mathrm{i}\text{=1,2,3,4,5}$$

odnosno:

$$p_1 = V{\cdot}y_1 = 5{,}988 \cdot 0.083 = 0.497 \approx 0{,}5$$
$$p_2 = V{\cdot}y_2 = 5{,}988 \cdot 0 = 0$$
$$p_3 = V{\cdot}y_3 = 5{,}988 \cdot 0.083 = 0.497 \approx 0{,}5$$
$$p_4 = V{\cdot}y_4 = 5{,}988 \cdot 0 = 0$$
$$p_5 = V{\cdot}y_5 = 5{,}988 \cdot 0 = 0$$

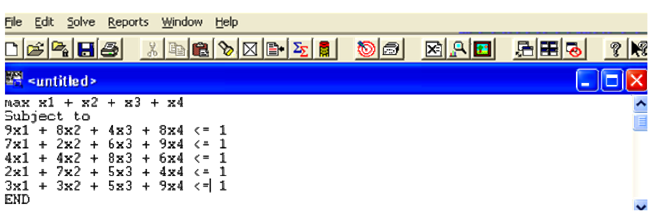
pa je:

$$P^{*}= (\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5) = (0{,}5;\ 0{,}5;\ 0,\ 0)$$

b) Bonitet koji putnička agencija “*XYZ*” dobija, ukoliko se izaberu optimalne strategije oba igrača, je 5,988 ≈ 6 %.

c) Da bi putnička agencija “*XYZ*” dobila maksimalno moguć popust, treba da ugovori sa organizatorom iz Bugarske 50% smeštajnih kapaciteta u Nesebaru i 50% smeštajnih kapaciteta u Pomorju. Optimalna strategija za organizatora iz Bugarske je da ugovori sa putničkom agencijom “*XYZ*” 50% smeštaja turista u hotelima *B* kategorije i 50% smeštaja turista u privatnom smeštaju.

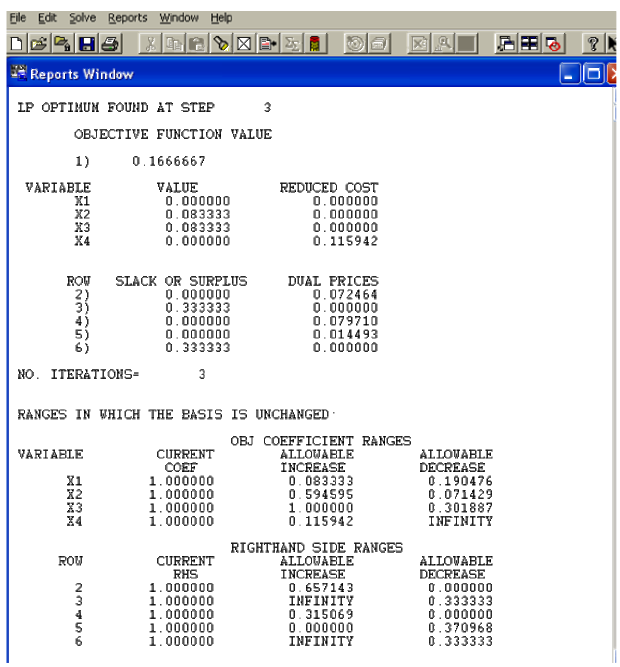
d) Rešavanje problema korišćenjem programskog paketa LINDO. Izgled ekrana sa postavljenim zadatkom je dat na slici I-10, a dobijemo rešenje za primarni i dualni modela sa urađenom analizom osetljivosti na slici I-11.



Slika I-10 . Izgled ekrana sa postavkom zadatka

Analiza osetljivosti. Pomoću analize osetljivosti moguće je odrediti u kojim granicama je dozvoljeno povećanje i smanjenje diskretnih promenljivih, pod uslovom da nađeno rešenje ostane optimalno. Posmatrano sa slike 4.7.1.2. može da se zaključi sledeće:

- da se koeficijent 1, koji se nalazi uz promenljivu x_1 u funkciji cilja, može povećati za najviše 0.083333 i smanjiti najviše za 0.190476;
- da se koeficijent 1, koji se nalazi uz promenljivu x_2 u funkciji cilja, može povećati za najviše 0.594595 i smanjiti za najviše 0.071429;
- da se koeficijent 1, koji se nalazi uz promenljivu x_3 u funkciji cilja, može povećati za najviše 1.000000 i smanjiti za najviše 0.301887;
- da se koeficijent 1, koji se nalazi uz promenljivu x_4 u funkciji cilja, može povećati za najviše 0.115942 i smanjiti beskonačno (do 0);
- da se koeficijent 1, koji se nalazi u I ograničenju sa desne strane znaka $\leq$, može povećati za najviše 0.657143 i da se ne može smanjiti;
- da se koeficijent 1, koji se nalazi u II ograničenju sa desne strane znaka $\leq$, može povećavati do beskonačnosti i smanjiti za najviše 0.333333 ;
- da se koeficijent 1, koji se nalazi u III ograničenju sa desne strane znaka $\leq$, može povećati za najviše 0.315069 i da se ne može smanjiti;
- da se koeficijent 1, koji se nalazi u IV ograničenju sa desne strane znaka $\leq$, ne može povećati i da se može smanjiti najviše za 0.370968;
- da se koeficijent 1, koji se nalazi u V ograničenju sa desne strane znaka $\leq$, može povećavati do beskonačnosti i da se može smanjiti najviše za 0,333333.




```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      0.1666667

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1         0.000000          0.000000
       X2         0.083333          0.000000
       X3         0.083333          0.000000
       X4         0.000000          0.115942


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000          0.072464
       3)         0.333333          0.000000
       4)         0.000000          0.079710
       5)         0.000000          0.014493
       6)         0.333333          0.000000

NO. ITERATIONS=       3

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                          OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE         ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE          DECREASE
      X1        1.000000         0.083333          0.190476
      X2        1.000000         0.594595          0.071429
      X3        1.000000         1.000000          0.301887
      X4        1.000000         0.115942          INFINITY

                          RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW         CURRENT        ALLOWABLE         ALLOWABLE
                   RHS           INCREASE          DECREASE
       2        1.000000         0.657143          0.000000
       3        1.000000         INFINITY          0.333333
       4        1.000000         0.315069          0.000000
       5        1.000000         0.000000          0.370968
       6        1.000000         INFINITY          0.333333
```

Slika I-11. Izgled ekrana sa rešenjem i analizom osetljivosti

Zaključak. Nakon proračuna pomoću Simpleks tabela i korišćenjem aplikativnog programa LINDO, dobijena su ista rešenja. Ona upućuju na zaključak da bonitet koji putnička agencija "*XYZ*" dobija, ukoliko se izaberu optimalne strategije oba igrača, iznosi $\nu = 5{,}988 \approx 6$ %. Da bi putnička agencija "*XYZ*" dobila maksimalno moguć popust, treba da ugovori sa organizatorom iz Bugarske, 50% smeštajnih kapaciteta u Nesebaru (50 ležajeva) i 50% smeštajnih kapaciteta u Pomorju (50 ležajeva).

Optimalna strategija za organizatora iz Bugarske je da ugovori sa putničkom agencijom "*XYZ*" 50% smeštaja turista u hotelima *B* kategorije (50 ležajeva) i 50% smeštaja turista u privatnom smeštaju (50 ležajeva).

Od ovako organizovanog letovanja, u Nesebaru treba ugovoriti 25% ležajeva u hotelima B kategorije i 25% ležajeva u privatnom smeštaju (od ukupno zahtevanog broja ležajeva) i u Pomorju takođe treba ugovoriti 25% ležajeva u hotelima B kategorije i 25% ležajeva u privatnom smeštaju, kao što je prikazano u tabeli I-35.

Tabela I-35. Način organizovanja letovanja za predstojeću sezonu

<table>
<tr><td></td><td colspan="7">Igrač B</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Igrač A</td><td colspan="2" rowspan="2"></td><td>(q_1=0)</td><td>(q_2=0,5)</td><td>(q_3=0,5)</td><td>(q_4=0)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>b_1</td><td>b_2</td><td>b_3</td><td>b_4</td></tr>
<tr><td>(p_1=0,5)</td><td>a_1</td><td>-</td><td>25</td><td>25</td><td>-</td><td>50</td></tr>
<tr><td>(p_2=0)</td><td>a_2</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>(p_3=0,5)</td><td>a_3</td><td>-</td><td>25</td><td>25</td><td>-</td><td>50</td></tr>
<tr><td>(p_4=0)</td><td>a_4</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>(p_5=0)</td><td>a_5</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td colspan="2">∑</td><td>-</td><td>50</td><td>50</td><td>-</td><td>100</td></tr>
</table>