Definicija i osnovne osobine matrica

Def 1. Matrice su dvodimenzionalne šeme brijeva oblika:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

→ Vrsta (red) ↓ Kolona

Koeficijenti $\mathbf{a_{ik}}$ su elementi matrice, gde je:

$$1 \le i \le m$$
$$1 \le k \le n$$

Elementi matrice $\mathbf{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}}$, pri čemu je $1 \le i \le m$, čine **i**-tu vrstu matrice.

Elementi matrice $\mathbf{a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{mk}}$, pri čemu je $1 \le k \le n$, čine **k**-tu kolonu matrice.

Elementi a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{mn} čine **glavnu dijagonalu** matrice.

Elementi a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, ..., a_{m1} čine **sporednu dijagonalu** matrice.

Matrica se kraće simbolički zapisuje: $A = [a_{ik}]_{m,n}$ i za nju se kaže da ima **m**-vrsta i **n**-kolona, tj. da je formata m x n.

$$a_{13}$$

Oblici matrica

Ukoliko je **m = n** , tj. ima isti broj redova i kolona, za matricu se kaže da je **kvadratnog** oblika,npr:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} 3x3$$

Ukoliko je $\mathbf{m \neq n}$, za matricu se kaže da je **pravougla**, npr:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix} 2x4 \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} 4x2$$

Specijalni slučajevi, a to su **vektori**:

- Matrice vrste (1 x n) $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ - to je vektor dimenzija 1x4

- Matrice kolone (m x 1) $\quad A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ - to je vektor dimenzija 3x1

Jedinična matrica (**I**) je kada su elementi na glavnoj dijagonali jedinice a ostali članovi nule, npr:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nula matrica (0) je matrica gde su svi elementi matrice jednaki nuli, kao:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Simetrične matrice – gledano u odnosu na glavnu dijagonalu svi elementi sa leve i desne strane matrice su isti, kao:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Adjungovana matrica – obradićemo kao zasebnu celinu

Matrica **susedstva**– obradićemo kao zasebnu celinu

Inverzna matrica ($\mathbf{A}^{-1}$) – obradićemo kao zasebnu celinu

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det A} \bullet \operatorname{adj} A$$

Trougaona matrica:

- Gornje trougaona matrica (svi elementi ispod glavne dijagonale su jednaki nuli):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Donje trougauna matrica (svi elementi iznad glavne dijagonale su jednaki nuli):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Def 2. Dve matrice su jednake ako su istog tipa (reda) i ako su im odgovarajući elementi jednaki.

Jednakost matrica ima osobine:

- Refleksivnost $A=A$
- Simetričnost $A=B \Rightarrow B=A$
- Tranzitivnost $A=B \wedge B=C \Rightarrow A=C$

Upoređuju se samo matrice istog reda !
$A=B$ Matrica A je jednaka matrici B samo ako su im svi članovi isti.
$A>B$ Samo ako su svi članovi matrice A veći od odgovarajućih članova matrice B.

Sabiranje matrica

Def 1. Zbir matrica $A[a_{ik}]_{m,n}$ i $B[b_{ik}]_{m,n}$ je matrica $C=A+B=[c_{ik}]_{m,n}$, gde je:

$$\mathbf{c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}}\ ; \qquad 1 \leq i \leq m \quad 1 \leq k \leq n$$

T1. Sabiranje matrica istog tipa (ranga) ima osobine:

- Komutativnosti $A+B = B+A$
- Asocijativnosti $(A+B)+C = A+(B+C)$

Primer 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A \quad + \quad B \quad = \quad C$$

$a_{11}+b_{11}=c_{11}$
$a_{12}+b_{12}=c_{12}$
$a_{21}+b_{21}=c_{21}$
$a_{22}+b_{22}=c_{22}$

Primer 2.

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+1 & 1+3 \\ 4-1 & 0-1 \\ 2+1 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

T2. Nula matrica (0) je neutralni element za sabiranje matrica, tj. važi:

$$\mathbf{A+0 = 0+A = A}$$

Oduzimanje matrica

Def 2. Razlika matrica $A[a_{ik}]_{m,n}$ i $B[b_{ik}]_{m,n}$ je matrica $C=A-B=[c_{ik}]_{m,n}$, gde je:

$$\mathbf{c_{ik} = a_{ik} - b_{ik}}\ ; \qquad 1 \leq i \leq m \quad 1 \leq k \leq n$$

Primer 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A \quad - \quad B \quad = \quad C$$

$a_{11}-b_{11}=c_{11}$
$a_{12}-b_{12}=c_{12}$
$a_{21}-b_{21}=c_{21}$
$a_{22}-b_{22}=c_{22}$

Množenje martice

Skalarom (brojem, konstantom)

Def 1. Matrica se množi skalarom α tako što se množi svaki član te matrice sa tim skalarom.

$$\alpha \bullet [a_{ik}]_{m,n} = [\alpha\, a_{ik}]_{m,n}$$

Primer 4.

$$\frac{1}{2} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 16 & 12 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & 7/2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 8 & 6 & 3/2 \end{bmatrix}$$

T1. Operacija množenja matrice skalarom, gde su α, β skalari a A,B martice, ima sledeće osobine:

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$
$$\beta(A+B) = \beta A + \beta B$$
$$(\alpha, \beta) \bullet A = \alpha(\beta A)$$
$$1 \bullet A = A$$

Proizvod matrica

Def 2. Proizvod matrica $A[a_{ik}]_{m,n}$ i $B[b_{ik}]_{m,p}$ je matrica $C[c_{ik}]_{m,p}$.

$$C = A \bullet B = C[c_{ik}]_{m,p} \qquad \text{pri čemu je}$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \qquad 1 \le i \le m \quad 1 \le k \le p$$

Zapis može da glasi i ovako: $A_{(mk)} \bullet B_{(kn)} = C_{(mn)}$

Primer 5.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = c_{11}$$
$$a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = c_{12}$$
$$a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = c_{21}$$
$$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = c_{22}$$

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Može i ovakav zapis (veoma je praktičan):

$$\begin{array}{cc} & B \\ & \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{bmatrix} \\ A\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}5 & 9\\ 5 & 9\end{bmatrix}C \end{array}$$

Primer 6.

$$\begin{bmatrix}5 & -2\\ 3 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix} x \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5*1+(-2)*2 & 5*0+(-2)*(-1) & 5*3+(-2)*1\\ 3*1+2*2 & 3-0+1*(-1) & 3*3+1*1\\ 1*1+(-2)*2 & 1*0+(-2)*(-1) & 1*3+(-2)*1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 13\\ 5 & -1 & 10\\ -3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

3 x 2 2 x 3

T2. Za množenje matrice ne važi zakon komutativnosti:

$$A \text{ x } B \neq B \text{ x } A$$

Primer 7.

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 8\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 6\\ 4 & 4\end{bmatrix}$$

Ukoliko za neke matrice važi AB = BA onda su one komutativne matrice.

T3. Za množenje matrice važe sledeće osobine:

- Asocijativnost (AB)C = A(BC)
- Desna distributivnost (A+B)C = AC + BC
- Leva distributivnost A(B+C) = AB + AC
- Množenje skalarom $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
- Neutralni element za množenje matrica je jedinična matrica (I) AI = IA = A

Napomena: Za razliku od skalara gde važi da je: $ab=0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0 \vee a,b=0$,
za matrice važi: $AB=0 \quad A,B \neq 0$

Primer 8.

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Def 3. Množenje matrice i vektora je uvek vektor.

Primer 9.

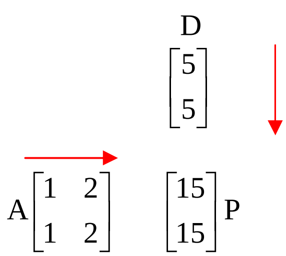
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A \;\text{x}\; \vec{D} = \vec{P}$$

$$a_{11}d_1 + a_{12}d_2 = p_1$$
$$a_{21}d_1 + a_{22}d_2 = p_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*5+2*5 \\ 1*5+2*5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Može i ovakav zapis (veoma je praktičan):



Transponovana matrica (A^T)

Def 1. Transponovana matrica matrice A je matrica A^T. Vrste i kolone zamene svoja mesta, tj. zarotiraju se uodnosu na glavnu dijagonalu.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

T1. Operacija transponovanja ima sledeće osobine:

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$; $\alpha \in R$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Stepenovanje kvadratne matrice

Def 1. Stepenovanje kvadratne matrice definiše se pomoću:

1. $A^n = \left\{ \quad \right\}$

2. $A^m \bullet A^n = A^{m+n}$ m,n su nenegativni celi brojevi

3. $(A^m)^n = A^{mn}$

Determinante

Prilikom rešavanja sistema jednačina javila se potreba za determinantama. Determinanta je broj, rešenje, matrični broj. Obeležava se pomoću dve uspravne crte $|\ |$.

Determinanta I reda, po definiciji glasi:

$$|a| = a$$

Determinanta II reda:

ax + by = e /d
cx + dy = f /(-b)
adx + bdy = ed   (+)
-bcx - bdy = -fb
adx - bcx = ed - fb
(ad - bc)x = ed - fb

ad – bc = Δ - **determinanta sistema**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$x = \frac{ed - fb}{\Delta}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} = ed - fb$$ - **det. člana x**

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$$ - **rešenje jednačina**

ax + by = e /(-c)
cx + dy = f /(a)
-acx - bcy = -ec   (+)
acx + ady = fa
ady - bcy = fa - ec
(ad - bc)y = af - ce

ad – bc = Δ - **determinanta sistema**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$y = \frac{af - ce}{\Delta}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = af - ce$$ - **det. člana y**

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$ - **rešenje jednačina**

Znači, determinanta II reda po definiciji glasi:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Primer 10.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Matrica A *Determinanta matrice A*

Determinanta n-tog reda, razvijanjem po bilo kojoj vresti ili koloni (Laplasovi razvoji):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_1K_{11} + a_{12}K_{12} + \dots + a_{1n}K_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}K_{1j}$$

K – je kofaktor i po definiciji glasi:

$$K_{ij} = (-1)^{i+j} \left|D_{ij}\right|$$

gde je Dij determinanta tog reda ili se drugačije zove **subdeterminanta**. Determinanta reda a_{11} je sve što ostane kada se precrta prva vrsta i prva kolona, i to je subdeterminanta tog reda.

Primer 11. Determinanta trećeg reda

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^2 a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^3 a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^4 a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Postoji skraćeni postupak (Sargosovo pravilo) za izračunavanje determinante trećeg reda. Dopisuju se dve kolone i počne razvijanje na sledeći način:

$$\det A = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Osobine determinanti

T1. $\det A = \det A^T$

Primer 11.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

T2. Ako u determinanti A međusobno promene mesta dve vrste (kolone) determinanta menja znak.

Primer 12.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix}$$

T3. Determinanta se množi skalarom α tako što se pomnoži svaki element jedne vrste (kolone) tim skalarom.

Primer 13.

$$\alpha \bullet \det A = \alpha \bullet \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix}$$

T4. Ako su elementi jedne vrste (kolone) proporcionalni elementima druge vrste (kolone) tada je determinanta jednaka nuli (0).

Primer 14.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \alpha\,(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

Primer 15.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 2*8 - 4*4 = 16 - 16 = 0$$

Primer 16.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2*6 - 4*3 = 12 - 12 = 0$$

Primer 17.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 3 & 18 & 18 \\ -2 & 3 & -12 \end{bmatrix} = 1*18*(-12) + 7*18*(-2) + 6*3*3 - 6*18*(-2) - 18*3*1 - (-12)*7*3$$

$$\Delta = -216 - 252 + 54 + 216 - 54 + 252$$

$$\Delta = 0$$

U primeru 17. prva i treća kolona su proporcionalne, jer je prva kolona pomnožena sa tri upravo treća kolona, tako da je determinanta jednaka nuli.

T5. $\det A = \det A^{(1)} + \det A^{(2)}$

Primer 18.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 7*2 - 3*11 = 14 - 33 = -19$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+4 & 3 \\ 5+6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 6-15 + 8-18 = -9 - 10 = -19$$

T6. det(A • B) = det (A) • det (B)

Primer 19.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A \bullet B) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 12 & 19 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 12 & 19 \end{vmatrix} = 8*19 - 9*12 = 152 - 108 = 44$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1*2 - 2*3 = 2 - 6 = -4$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2*2 - 5*3 = 4 - 15 = -11$$

det A • det B = (-4) • (-11) = 44

T7. Determinanta ne menja vrednost ako se elementi jedne vrste (kolone) pomnože nekim skalarom (brojem) i dodaju drugoj vrsti (koloni).

Primer 20.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 4*6*(-3)+4*2*1+1*4*(-1)-1*6*1-4*2*(-1)-4*4*(-3) = -72+8-4-6+8+48 = -18$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

= 0*5*(-3) + 4*(-1)*2 + 1*0*(-1) – 1*5*2 – 0*(-1)*(-1) – 4*0*(-3) = 0 – 8 – 0 – 10 – 0 + 0 = - 18

Rešavanje n-linearnih jednačina sa n-nepoznatih

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$
$$\dots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Sistem jednačina ima rešenja ako je determinanta različita od nule $\Delta \neq 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta x_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$X_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}$$

X_i - rešenje jednačina
Δx_i - determinanta člana **x**
Δ - determinanta sistema

Primer 21. Rešiti sistem dve jednačine sa dve nepoznate ?

$$4x + y = 5$$
$$3x – 2y = 12$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4*(-2) – 1*3 = -8 -3 = -11$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 12 & -2 \end{vmatrix} = 5*(-2) – 1*12 = -10 -12 = -22$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 4*12 – 5*3 = 48 – 15 = 33$$

$$X = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-22}{-11} = 2 \qquad Y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{33}{-11} = -3$$

Primer 22. Rešiti sistem tri jednačine sa tri nepoznate ?

$$\begin{aligned} 2x + 4y + z &= 4 \\ 3x + 6y + 2z &= 4 \\ 4x - y - 3z &= 1 \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2*6*(-3)+4*2*4+1*3*(-1)–1*6*4–2*2*(-1)–4*3*(-3) = -36+32-3-24+4+36 = 9$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = - 72 +8 -4 -6 + 8 + 48 = -18$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -24 + 32 + 3 -16 - 4 + 36 = 27$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 64 -12 - 96 +8 -12 = -36$$

$$X = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-18}{9} = -2 \qquad Y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{27}{9} = 3 \qquad Z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-36}{9} = -4$$

Adjungovana matrica

Def 1. Neka je data kvadratna matrica A dimenzija n x n.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Adjungovana matrica matrice A je:

$$\text{adj } A = \text{adj}[a_{ik}] = [A_{ik}]^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

A_{ik} – Kofaktor a_{ik} matrice A.

Primer 23. Napisati adjungovanu matricu matrice A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{odj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 2*0-3*1= -3$ $\quad A_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 4*0-1*5= -5$ $\quad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} =4*3-2*5= 2$

$A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1*0-3*3= -9$ $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} =2*0-3*5= -15$ $\quad A_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} =2*3-1*5= 1$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1*1-3*2= -5$ $\quad A_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =2*1-3*4= -10$ $\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2*2-1*4= 0$

$$\text{odj } A = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 2 \\ -9 & -15 & 1 \\ -5 & -10 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & -9 & -5 \\ -5 & -15 & -10 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice se mogu koristiti za predstavljanje ravnih grafova. Takve matrice se zovu matrice susedstva, i one su kvadratnog oblika.

Primer 24. Za graf na slici napisati matricu susedstva A i njenu adjungovanu matricu?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ - matrica susedstva}$$

$$A_{11}= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

-Ukoliki su u jednoj vrsti ili koloni sve nule tada je rešenje determinante nula.

$A_{12}= A_{13}= A_{14}= 0$

$$A_{21}= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1*0*0 + 1*0*0 + 1*1*1 – 1*0*0 – 1*0*1 – 1*1*0 = 1$$

$$A_{22}= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1*0*0 + 1*0*0 + 1*1*1 – 1*0*0 – 1*0*1 – 1*1*0 = 1$$

$A_{23}= 0$

$$A_{24}= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1*1*1 + 1*0*0 + 1*1*0 – 1*1*0 – 1*0*0 – 1*1*1 = 0$$

$A_{31}= A_{32}= A_{33}= A_{34}= A_{41}= A_{42}= A_{43}= A_{44}= 0$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Inverzna matrica A^{-1}

Def 1. Inverzna matrica (A^{-1}) je inverzni elemenat za operaciju množenja matrica, ako važi:

$$A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I$$

Def 2. Kvadratna matrica A, koja ima inverznu matricu A^{-1}, naziva se regularana, a ukoliko nema onda je singularna kvadratna matrica.

T1. Kvadratna matrica $A=[a_{ij}]_1^n$ je regularna ako i samo ako je determinanta $\mathbf{detA \neq 0}$. U tom slučaju inverzna matrica se računa:

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{\det A} \bullet \operatorname{adj} A$$

Primer 25. Naći inverznu matricu (A^{-1}) zadate matrice A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2*(-4)*3*1= -24$$

$$A_{11}= \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12 \quad A_{12}= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{13}= \begin{vmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{14}= \begin{vmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21}= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{22}= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{23}= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{24}= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{31}= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{32}= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{33}= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \quad A_{34}= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{41}= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{42}= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{43}= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{44}= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -24$$

$$\text{adjA} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix}$$

$$\text{adjA} = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -24 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -24 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{\text{detA}} \bullet \text{adjA}$$

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{-24} \bullet \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -24 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 & 0 \\ -1/6 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$